Lezione 16

11/11/24

FORME INDETERMINATE DELLA POTENZA

Se $\lim_{x\to *} f(x)^{g(x)}$ NOT: 0^0 SIGNIFICA $f(x) \longrightarrow 0$, $g(x) \longrightarrow 0$

0^0 F. I

∞^0 F. I.

1^∞ F. I.

ESEMPI

- $\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{1}{\ln x}\right)} = 0^0$ F. I

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[x^{\boxed{\frac{1}{\ln x}}}\right]} = \lim_{x\to 0^+} e^{\boxed{\frac{1}{\cancel{\ln x}}}\cancel{\ln x}} = e$$

- $e^{\ln(a)} = a$
- $\ln(x^{\boxed{b}}) = \boxed{b} \cdot \ln x$

- $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-3}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-3}{\ln x}}\right]}$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-3}{\ln x}\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{3}{\ln x}[\ln x - \ln 2]}$$

$$= e^{-3\left[\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - \ln 2}{\ln x}}_{\downarrow 1}\right]} = e^{-3}$$

← PER CONFRONTO DI INFINITI

$$\bullet \lim_{x\to 0} \underbrace{(1+x)}_{\to 1}^{\frac{1}{x}\to\infty} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

$$= e^{\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}\to 1} = e$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\bullet \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)} = \frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)}$$

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(1-e^x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{2\sin(1-e^x)}{-(1-e^x)}}\to 1$$

$$= -2$$

POSSO APPLICARE

$$\lim \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$$

SE $f(x) \longrightarrow 0$

$\bullet \lim_{x\to 0}(1-e^x) = 0$ VERO ✓

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x - e^x}{x}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$$

$$= -\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}}_{0} - \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}}_{1} = -1$$

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA [Weierstrass]

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

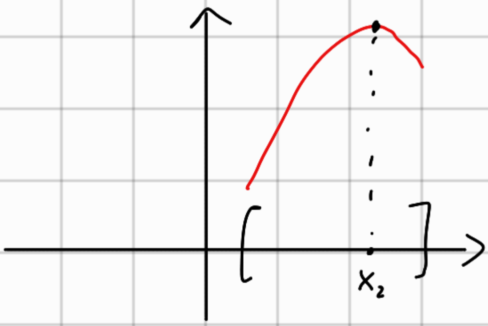
↑ CHIUSO e LIMITATO

ALLORA $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. x_2 p.to di MASSIMO ASSOLUTO
x_1 p.to di MINIMO ASSOLUTO

NOTA $f: D \to \mathbb{R}$ funzione

x_2 è p.to di MASSIMO ASSOLUTO in $A \subseteq D$
x_1 MINIMO

$\forall x \in A$ $\quad f(x_2) \geq f(x)$
$f(x_1) \leq f(x)$



QUINDI

$\exists\, M, m \in \mathbb{R}, \quad f(x_2) = M$
$f(x_1) = m$

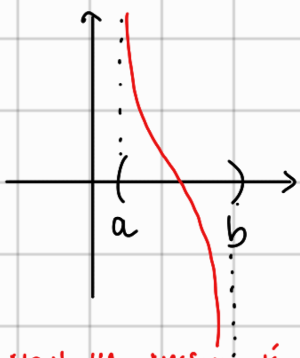
NOTA BENE

QUESTA È UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA

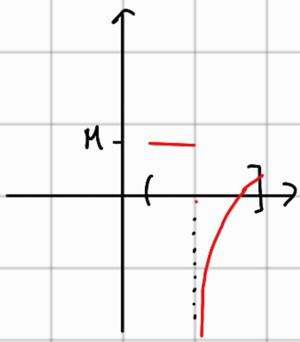
CIOÈ SULLE FUNZIONI $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ oppure discontinue

NON POSSIAMO CONCLUDERE NIENTE. CE NE SONO ALCUNE CHE HANNO IL MASSIMO e/o IL MINIMO e ALTRE NO.

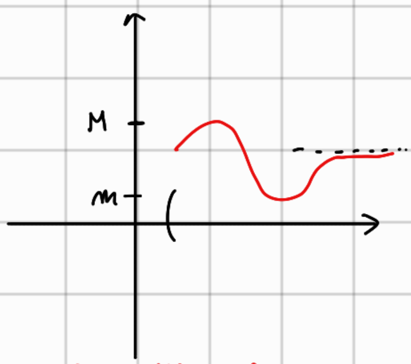
esempio



NON HA MASSIMO NÉ MINIMO



HA MASSIMO MA NON MINIMO



HA SIA MASSIMO CHE MINIMO

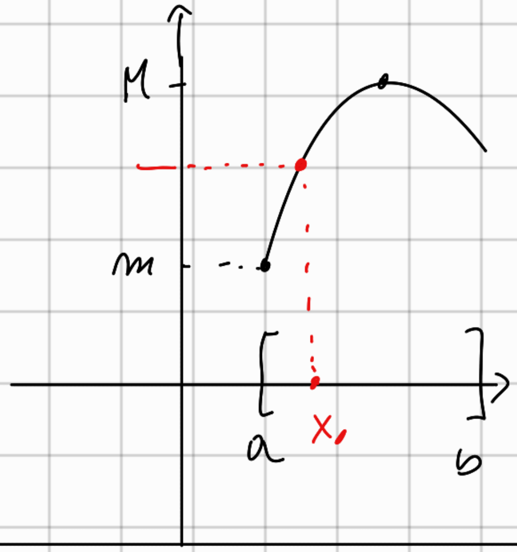
TEOREMA [VALORI INTERMEDI]

• f CONTINUA in $[a,b]$

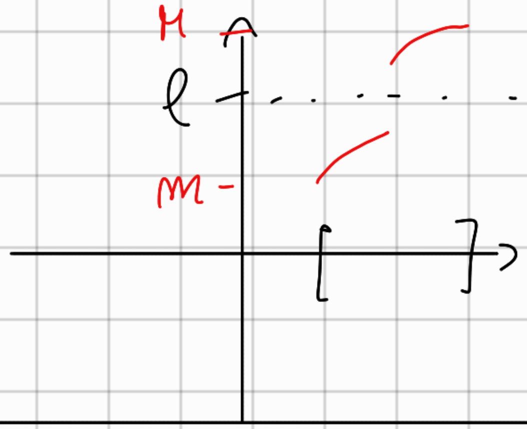
PER WEIERSTRASS
$$\left(\begin{array}{llll} \exists x_1 & \text{p.to} & \text{MIN} & f(x_1)=m \\ \exists x_2 & \text{p.to} & \text{MAX} & f(x_2)=M \end{array}\right)$$

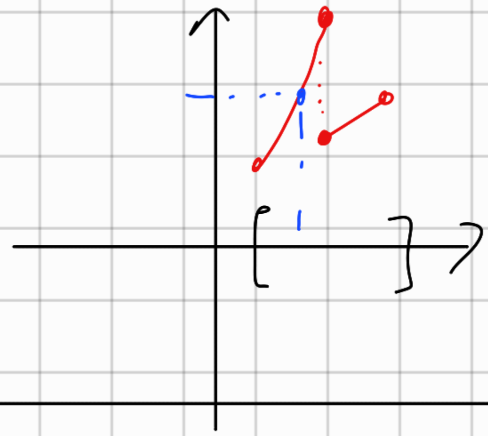
$$\forall \ell \text{ t.c. } m<\ell<M \quad \exists x_0 \in [a,b] \quad \text{t.c.} \quad f(x_0)=\ell$$

Cioè la funzione assume tutti i valori compresi tra massimo e minimo.



ANCHE QUI SE f è DISCONTINUA POTREBBE ASSUMERE TUTTI I VALORI OPPURE NO.



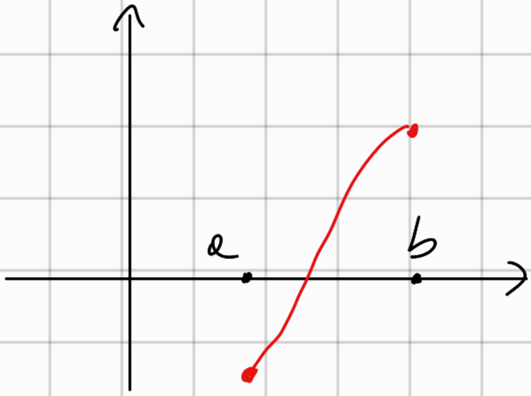


TEOREMA [ESISTENZA DEGLI ZERI]

Sia • f CONTINUA IN $[a,b]$

• $f(a)<0 \wedge f(b)<0$ (o VICEVERSA)

$$\exists x_0 \in (a,b) \quad \text{t.c.} \quad f(x_0)=0$$



ASINTOTO OBLIQUO

- Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

CALCOLO

SE è FINITO

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

SE è FINITO ANCHE QUESTO

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = q$$

La retta $y = mx+q$ è ASINTOTO OBLIQUO per f

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$ NO ASINTOTO OBLIQUO

$$f(x) = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

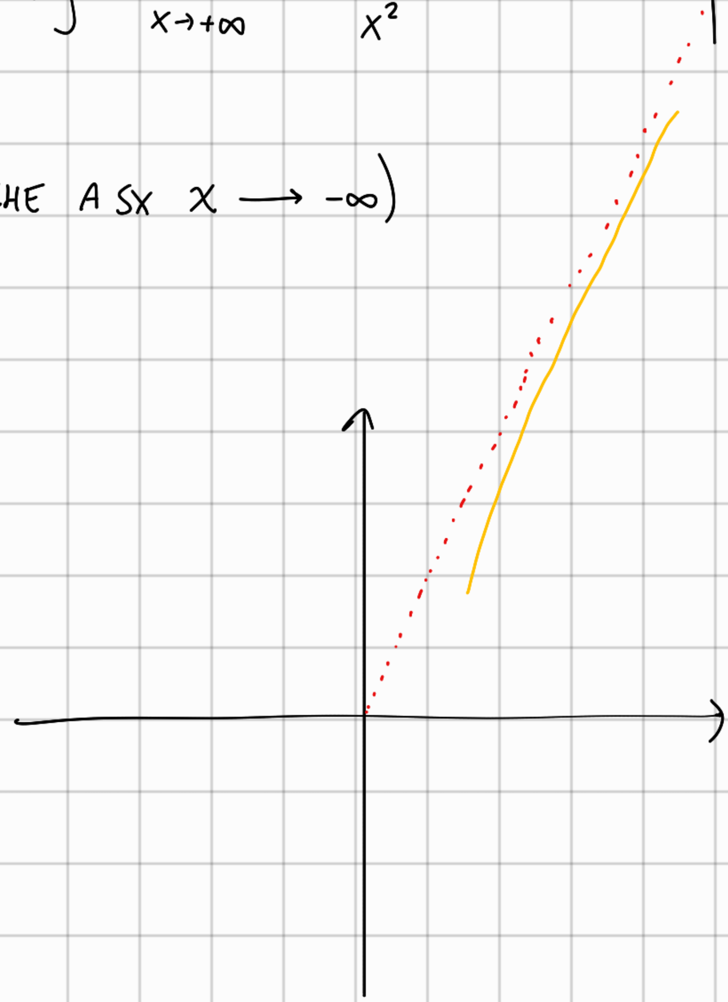
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{2x^3-1}}{\underset{+\infty}{x^2}} = +\infty$$ NO A.OB

CERCO L'A. OB.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-1}{x^3} = 2 = m$$ è FINITO ok

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^3 - 1}{x^2} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x^3} - 1 - \cancel{2x^3}}{x^2} = 0 = q$$

(VERIFICARE ANCHE A SX $x \longrightarrow -\infty$)



PARITÀ DI UNA FUNZIONE

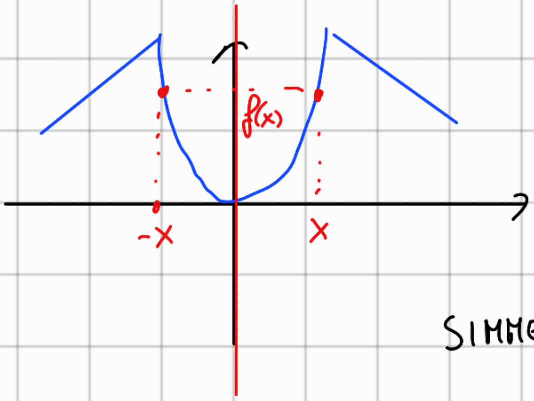
Se $D \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme tale che se $x \in D \Rightarrow -x \in D$

(CIOÉ SIMMETRICO RISPETTO A O)

ESEMPI : $D = (-5,5)$ oppure $(-\infty, +\infty)$

oppure $[-7,-2) \cup (-1,1) \cup (2,7]$

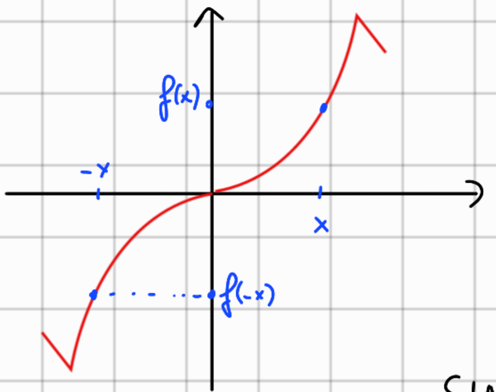
$f: D \to \mathbb{R}$ si dice PARI $\Leftrightarrow$ $\forall x \in D$ $f(-x) = f(x)$



ESEMPI c, x^2, x^4, $\cos(\alpha x)$

SIMMETRICA RISPETTO A ASSE y

$f: D \to \mathbb{R}$ si dice DISPARI $\Leftrightarrow$ $\forall x \in D$ $f(-x) = -f(x)$



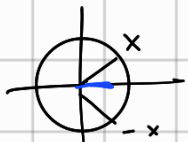
$x, x^3, x^5 \dots$

$\sin(\alpha x)$, $tg(x)$

SIMMETRICA RISPETTO a O

ESERCIZIO VERIFICARE LA PARITÀ $f_1(x) = \dfrac{5x}{\cos x}$

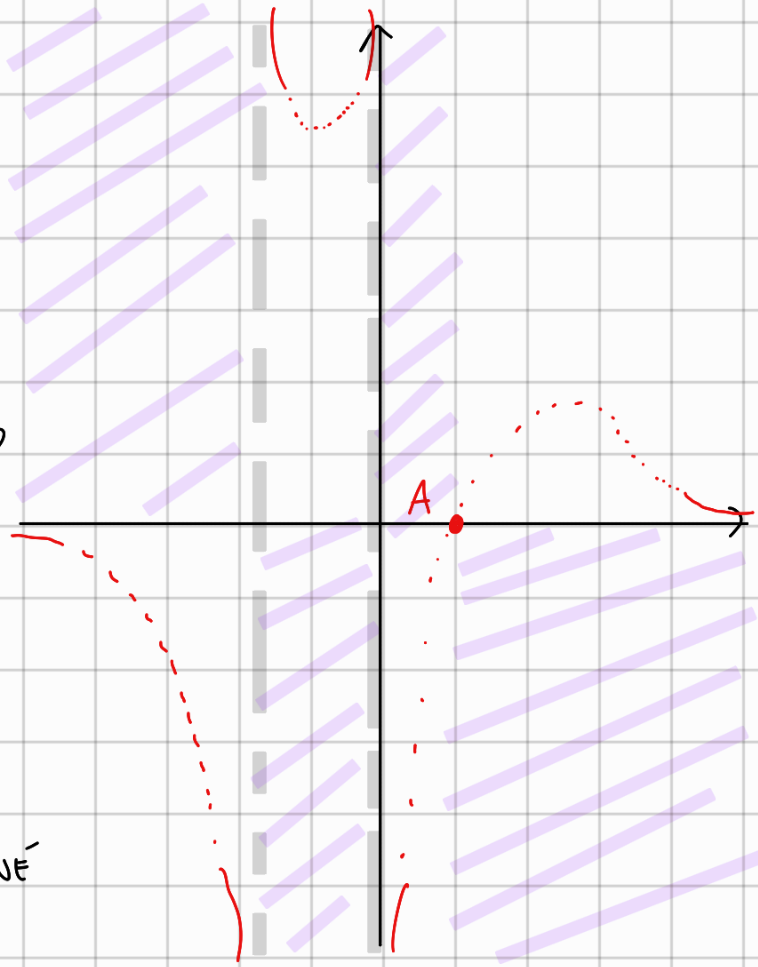
$$f_1(-x) = \frac{5(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-5x}{\cos x} = -\frac{5x}{\cos x} = -f_1(x)$$ f_1 è DISPARI



- $f_2(x) = \sin^2(x) + 2$
- $f_3(x) = x^4 + 3x - 5$
- $f_4(x) = x^3(\sin 7x)$

STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x) = \frac{x-1}{8x^2+7x}$$



- DOMINIO   C.E. $8x^2+7x \neq 0$

$$(8x+7)x \neq 0$$

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad 8x+7 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{7}{8}$$

$$D = \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cup \left(-\frac{7}{8}, 0\right) \cup \left(0, +\infty\right)$$

(SE VOLETE)

- VERIFICATE CHE NON È NÉ PARI NÉ DISPARI

- INTERSEZIONE ASSE y $0 \notin D$ NON LA CALCOLO

- STUDIO DEL SEGNO (E INTERSEZIONE ASSE x)

$$\frac{x-1}{8x^2-7x} \geq 0$$

$x - 1 \geq 0$

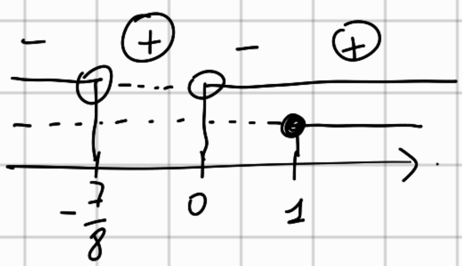
$x \geq 1$

$8x^2+7x > 0$

$x_1 = -\frac{7}{8}, \quad x_2 = 0$

$x < -\frac{7}{8} \quad \vee \quad x > 0$

INT. ESTERNI



- f è POSITIVA IN $\left(-\frac{7}{8}, 0\right) \cup (1, +\infty)$
- f è NEGATIVA IN $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cup (0, 1)$
- f è NULLA IN $x = 1$ $\quad A = (1, 0)$ ← INTERSEZIONE ASSE X

LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{x-1}^{-\infty}}{\underbrace{8x^2+7x}_{+\infty}} = 0$$

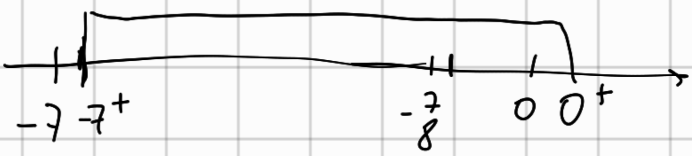
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{8x^2+7x} = 0$$

$y = 0$ A.OR.

CON QUESTO SIMBOLO INDICO UNA QUANTITÀ NEGATIVA FINITA (⊕ SARÀ UNA QUANTITÀ POSITIVA FINITA)

$$\lim_{x\to\left(-\frac{7}{8}\right)^+} \frac{\overbrace{x-1}^{\ominus}}{\underbrace{x}_{\ominus}\underbrace{(8x+7)}_{0^+}} = +\infty$$

$$\cancel{8}\cdot\left(-\frac{7}{\cancel{8}}\right)^+ = -7^+ + 7 = 0^+$$



$$\lim_{x\to\left(-\frac{7}{8}\right)^-} \frac{\overbrace{x-1}^{\ominus}}{\underbrace{x}_{\ominus}\underbrace{(8x-7)}_{0^-}} = -\infty$$

$x = -\frac{7}{8}$ A.V.

PER CASA VERIFICARE

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$\to$ $x = 0$ A.V.