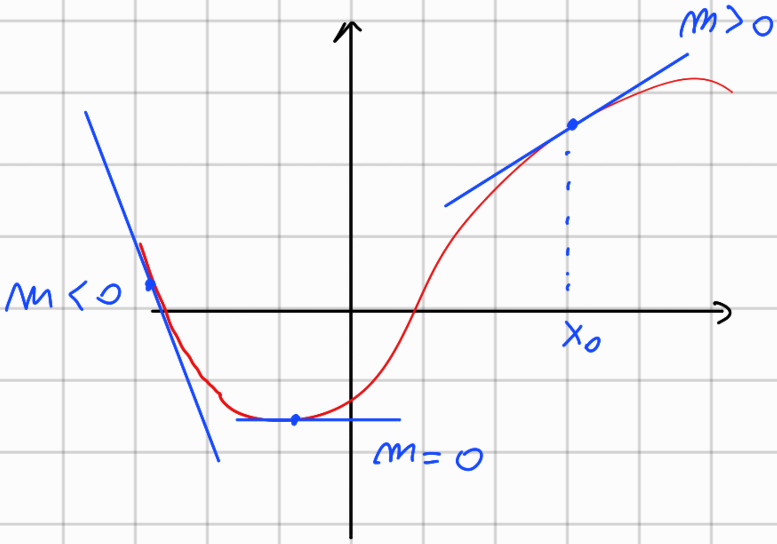
Lezione 17 — 12/11/24

LA DERIVATA

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ funzione $D \subseteq \mathbb{R}$

La sua derivata è una funzione che ci dà informazioni su dove f cresce, dove decresce, e "dove è piatta"

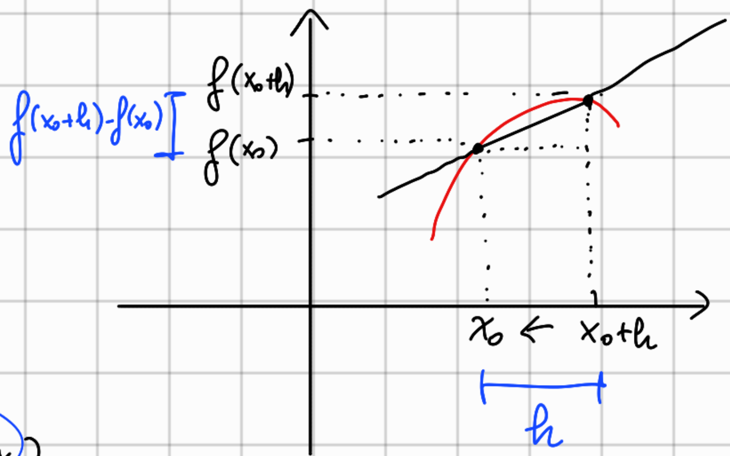
COSA È LA RETTA TANGENTE?



Definizione

Sia $x_0 \in D$, $h \in \mathbb{R}$ ← INCREMENTO

$x_0 + h$



IL RAPPORTO INCREMENTALE È

$$m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se esiste ed è finito il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

↑ IL RISULTATO DI QUESTO LIMITE LO CHIAMO COSÌ

ESSO È PER DEFINIZIONE IL VALORE DELLA DERIVATA DI f IN x_0.

DIREMO CHE f è DERIVABILE IN x_0. (f è DERIVABILE in A se è DERIVABILE $\forall x \in A$)

$D' \subseteq D$

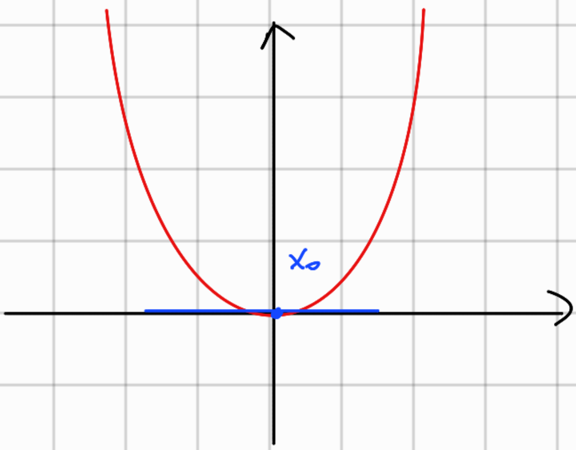
$$f' : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x) \quad \text{è una funzione}$$

ESEMPIO $f(x) = x^2$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h^2}}{\cancel{h}} = 0$$

$\Rightarrow$ LA RETTA TANGENTE IN $x_0 = 0$ è ORIZZONTALE cioè $m = 0$

PER CASA $f'(1)$, $f'(2)$



Definizione.

$$f'_{\pm}(x_0) \quad \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

SI DICE DERIVATA SINISTRA (DESTRA)

PROPOSIZIONE

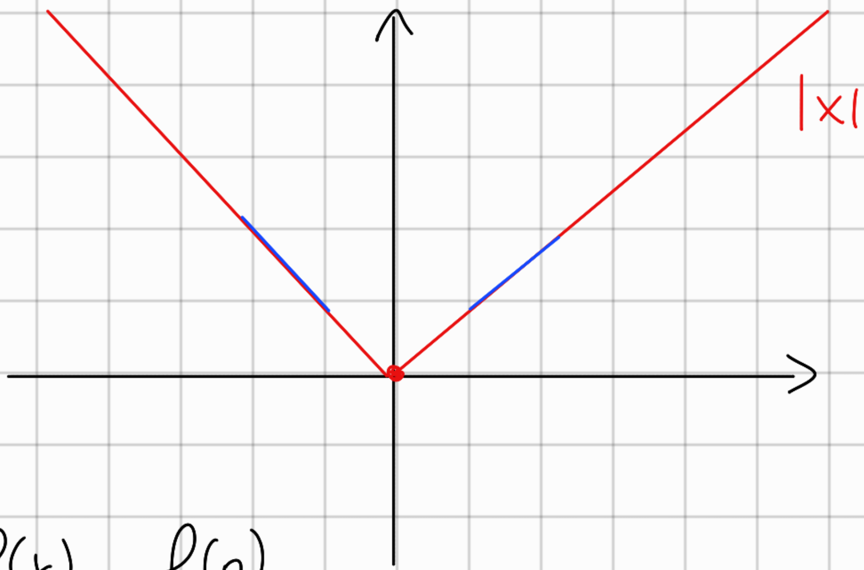
f è DERIVABILE IN x_0 $\iff$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ ← FINITO

TEOREMA

Se f è DERIVABILE IN x_0 $\Rightarrow$ f è CONTINUA IN x_0

CI SONO FUNZIONI CHE SONO CONTINUE MA NON DERIVABILI

in $x_0 = 0$



$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

È CONTINUA cioè

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$$

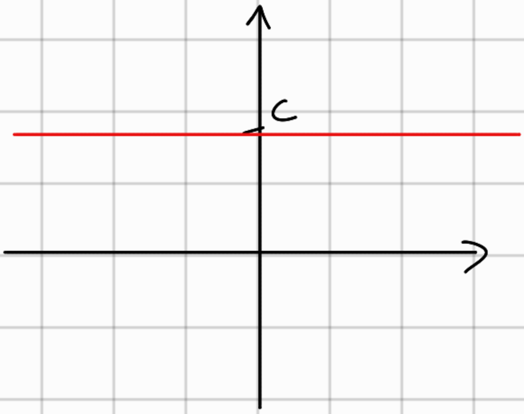
$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1 \neq -1$$

$\Rightarrow$ f NON È DERIVABILE IN 0.

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Sia $c \in \mathbb{R}$ COSTANTE

$$\boxed{f'(c) = 0} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



ES.

$$f'(5) = 0$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{e^3}\right) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{c-c}}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

DERIVATA DEI POLINOMI (DI PRIMO GRADO)

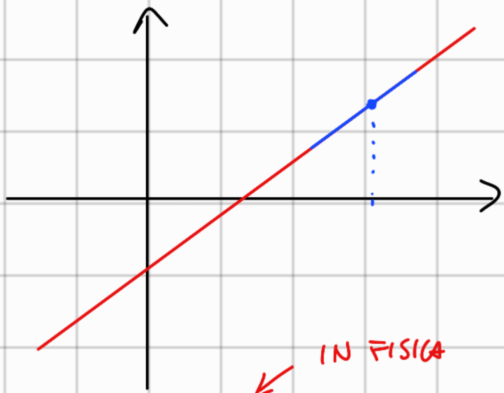
↖ RETTE

$$f(x) = mx + q$$

$$\boxed{f'(x) = m}$$

↑ PER CASA

$$\lim \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = m$$



IN FISICA

$$\boxed{x(t) = V_0 t + x_0}$$

(PIU' IN GENERALE)

- DERIVATA DI UNA POTENZA $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a$$

$$\boxed{f'(x) = a x^{a-1}}$$

ESEMPI

$$\frac{2}{5}-1=\frac{2-5}{5}=-\frac{3}{5}$$

$$f(x)=x^8 \rightarrow f'(x)=8x^7$$

$$f(x)=\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}} \rightarrow f'(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

DERIVATA DELL' ESPONENZIALE $a\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=a^x \qquad \boxed{f'(x)=(\ln a)a^x}$$

SE $a=e$ $\qquad f'(x)=\underline{\ln e}\, e^x=e^x$

ESEMPIO

$$f(x)=2^x \rightarrow f'(x)=(\ln 2)2^x$$

DERIVATA DEL LOGARITMO $a\in\mathbb{R}^+$

$$f(x)=\log_a(x) \rightarrow \boxed{f'(x)=\log_a(e)\cdot\frac{1}{x}}$$

CASO PARTICOLARE

$$a=e \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

DERIVATA DELLE F. TRIGONOMETRICHE

$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f'(x) = -\sin x$

PROPRIETÀ DELLE DERIVATE

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$ DERIVATA DELLA SOMMA

$$[\alpha f'(x)] = \alpha f'(x)$$ PRODOTTO PER UNA COSTANTE $\alpha \in \mathbb{R}$

ESEMPIO

$$[x^a]' = a x^{a-1}$$

$$f(x) = 7x^4 - 2x^2 + 3$$

$$f'(x) = [7x^4 - 2x^2 + 3]' = [7x^4]' + [-2x^2]' + [3]'$$

$$= 7[x^4]' - 2[x^2]' + 0 = 7 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x$$

$$= 28x^3 - 4x$$

DERIVATA DEL PRODOTTO

$$[f(x) g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

ESEMPIO

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{g(x)} = \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{\cos x}_{g} - \underbrace{x^2}_{f} \overbrace{\sin x}^{g'}$$

$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = -\sin x$

Se $g(x) \neq 0$ DERIVATA DEL RAPPORTO

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

RICORDO

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

ESEMPIO $f(x) = tg(x)$

$$[tg(x)]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\left[f(g(x))\right]' = f'[\underbrace{g(x)}_{}]\cdot g'(x) \qquad (x^2)' = 2x$$

- $$\left[\cos^2 x\right]' = \left[(\cos x)^2\right] \qquad f(y) = y^2, \quad f'(\underbrace{y}_{}) = 2y \qquad g(x) = \cos x$$
$$= 2\cos x\,\overline{(-\sin x)}$$
$$= -2\cos x \sin x \quad \left[= -\sin 2x\right]$$

- $$\left[e^{3x^2-5}\right]' = e^{3x^2-5}\cdot\left[6x\right] = \underline{6x\cdot e^{3x^2-5}}$$

- $$\left[\frac{1}{\ln^2 x}\right]' = \left[(\ln x)^{-2}\right]' = \boxed{-2(\ln(x))^{-3}}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{2}{x\ln^3 x}$$

$$-\tfrac{1}{2}$$

- $$\sqrt{e^{2x+1}} = \left(e^{2x+1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(e^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(e^{2x+1}\right)\cdot\cancel{2}$$
$$= \left(e^{2x+1}\right)^{-1/2}\cdot\left(e^{2x+1}\right)$$
$$= e^{-x-\frac{1}{2}+2x+1} = e^{x+1/2}$$