Lezione 18 15/11/24

ESEMPI DI DERIVATE

- $f(x) = 5\ln x$ $\qquad f'(x) = 5(\ln x)' = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$

- $f(x) = e^x - 3\ln x$ $\qquad f'(x) = e^x - 3 \cdot \frac{1}{x} = e^x - \frac{3}{x}$

- $f(x) = x \cdot \ln x$ (C.E. $x > 0$) $\qquad f'(x) = 1 \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$
$= \ln x + 1$

- $f(x) = e^x \sin x$ $\qquad f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x =$
$= e^x(\sin x + \cos x)$

- $h(x) = \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{\cos x \sin x}_{g}$ $\qquad h'(x) = f'g + fg' =$

$= 2x \cos x \sin x + x^2 [\sin x \cos x]'$

$= 2x \boxed{\cos x \sin x} + x^2 [\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x}]$

$= x \sin 2x + x^2 \cos 2x$

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

- $f(x) = \cos(\underbrace{\ln x}_{g})$ $\qquad f'(x) = -\sin(\ln x)\,\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$

- $f(x) = \cos^2 3x + 2$ $\qquad f'(x) = 2\cos(3x)\left[\cos(3x)\right]'$

  $[\cos(3x)]^2$

$$= 2\cos(3x)\left[(-\sin(3x))\cdot 3\right]$$

$$= -3\cdot 2\cos(3x)\sin(3x)$$

$$\left[= -3\sin(6x)\right]$$

$2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha$

- $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ $\qquad f'(x) = \frac{1(e^x-1) - xe^x}{(e^x-1)^2}$

$$= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{e^x(1-x) - 1}{(e^x-1)^2}$$

- $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ $\qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{3}{4}}$ $\qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^{\left(-\frac{3}{4}-1\right)} =$

$$= -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}$$

$$= -\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2-7}}{5\cos(x^3)} = \frac{(x^2-7)^{1/2}}{5\cos(x^3)}$$

$$5\left[\quad\right]$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{5}\left[(x^2-7)^{1/2}\right]'\cos(x^3) - \cancel{5}(x^2-7)^{1/2}\left[\cos(x^3)\right]'}{\cancel{25}\,\cos^2(x^3)} =$$

$$5$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\cos(x^3) + 3x^2\sqrt{x^2-7}\,\sin(x^3)}{5\cos^2(x^3)}$$

$$\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$$

$$= \frac{x\cos(x^3) + 3x^2(x^2-7)\sin(x^3)}{5\sqrt{x^2-7}\,\cos^2(x^3)}$$

$$\bullet \quad \left[(\underline{x^2-7})^{1/2}\right]' = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2-7)^{-1/2}\cdot\cancel{2}x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}$$

$$\bullet \quad \left[\cos(x^3)\right]' = -\sin(x^3)\cdot 3x^2$$

$$= -3x^2\sin(x^3)$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Ricordo Dato $x_0 \in D$ f è DERIVABILE IN x_0 se

$$\exists \text{ finito } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} = f'(x_0)$$

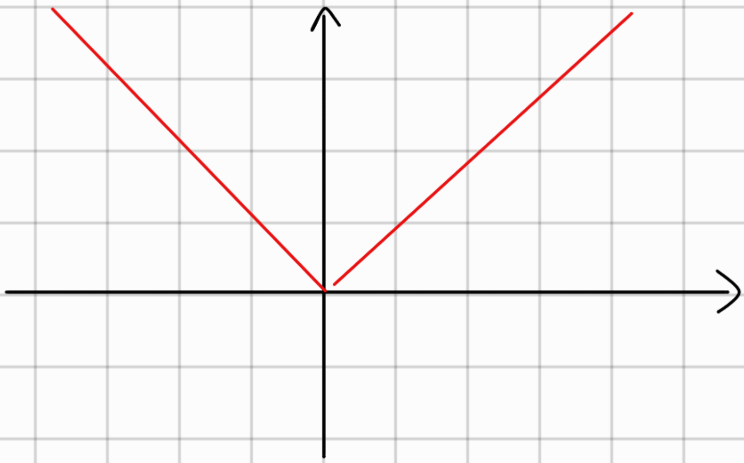
$$\iff \exists \quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \quad \text{FINITI}$$

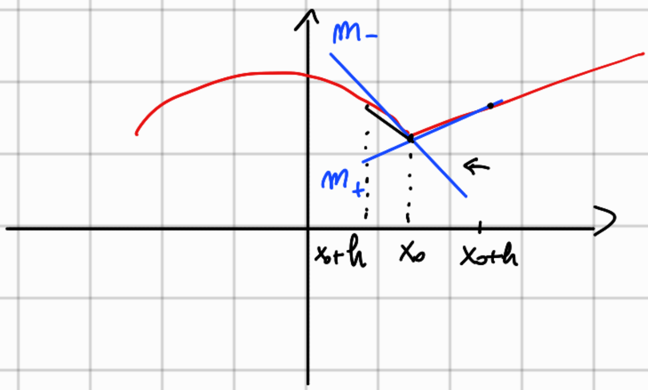
Cose succede se NON è VERO?

DIREMO CHE x_0 è P.TO DI NON DERIVABILITÀ per f

CASO 1 $\boxed{f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)}$ FINITI (O ALMENO UNO DEI DUE È FINITO)

Diremo che x_0 è **PUNTO ANGOLOSO**

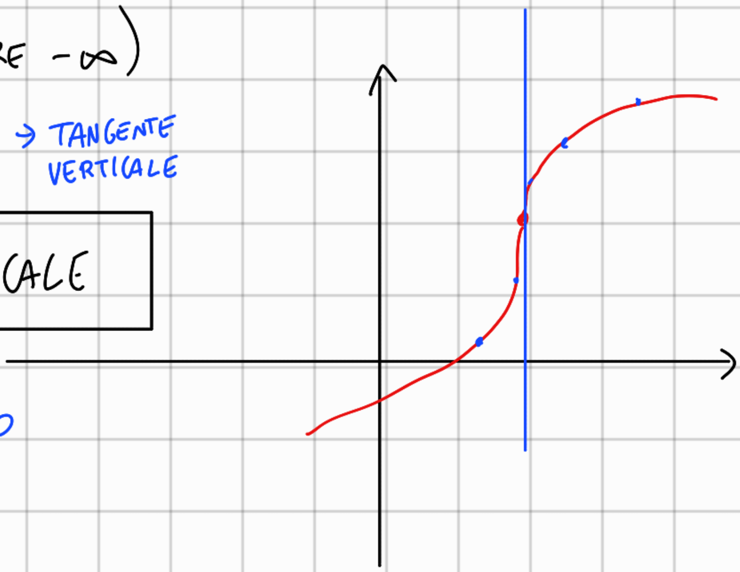




SE ENTRAMBI I LIMITI SONO INFINITI
DISTINGUIAMO DUE CASI

(OPPURE $-\infty$)

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$$ → TANGENTE VERTICALE



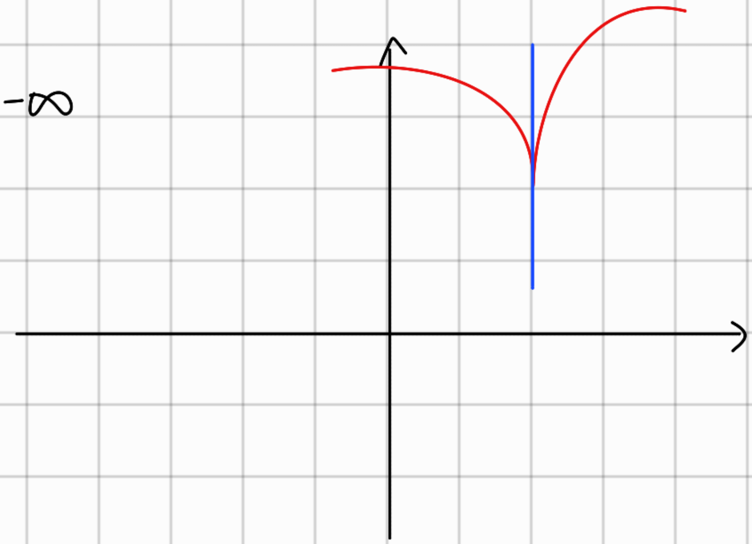
x_0 P.TO DI $\boxed{\text{FLESSO VERTICALE}}$

ESEMPIO $\sqrt[3]{x}$ IN $x_0=0$

SE INVECE

$$f'_+(x_0) = +\infty \quad e \quad f'_-(x_0) = -\infty$$

(O VICEVERSA)



diremo che x_0 è UN PUNTO DI CUSPIDE

ESEMPIO $\sqrt[3]{x^2}$ IN $x_0 = 0$

$f'(x_0)$ NON LO POSSO SCRIVERE! $\quad x_0 \notin D'$ ← DOMINIO DELLA DERIVATA

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$D = \mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-2)(-2)(-2) = \ = -8$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$D' = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\neq D$

$0 \in D$ MA $0 \notin D'$ $\Rightarrow$ 0 È P.TO DI NON DERIVABILITA'

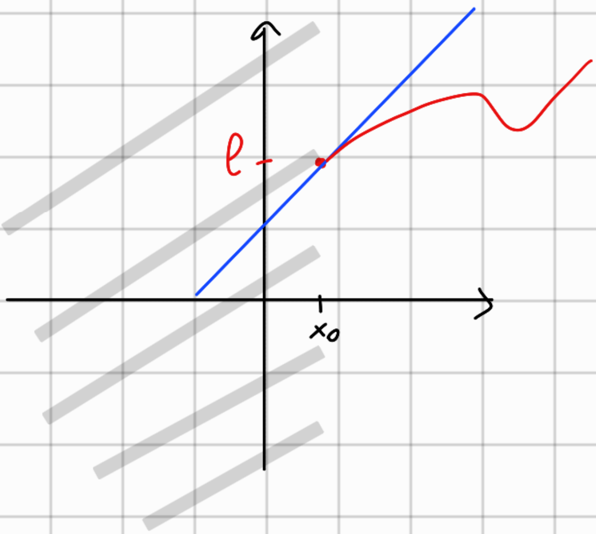
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2/3}{0^+} = +\infty$$

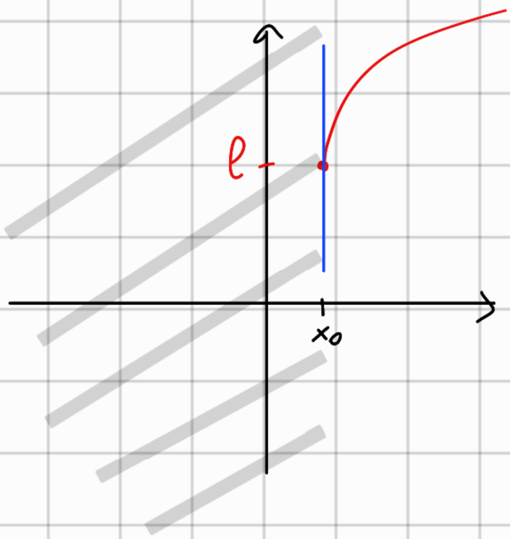
$\sqrt[3]{0^-} = 0^-$

$\rightarrow$ $x_0 = 0$ è PUNTO DI CUSPIDE per f

COSA SUCCEDE se x_0 è UN ESTREMO DEL DOMINIO
e
LA FUNZIONE A DX O SX di x_0 NON ESISTE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$





Se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = m$

m FINITO $\uparrow$

PUNTO A TANGENTE OBLIQUA

se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \infty$

$\uparrow$

PUNTO A TANGENTE VERTICALE

$\downarrow$

$y(x) = \sqrt{x}$

$\downarrow$

VERIFICARE CHE $y'(x)$

$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = +\infty$

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Date due funzioni $f(x), g(x)$ definite $I(x_0)$

SE

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ oppure $\boxed{\frac{0}{0}}$

IMPORTANTE VALE SOLO IN QUESTI CASI

- f, g SONO DERIVABILI IN $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

- $g'(x) \neq 0$ IN $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

ALLORA

SE $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-4}{\ln x} \underset{D.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 8x^2 = +\infty$$

$4x^2-4 \to +\infty$ DERIVO

$\ln x \to +\infty$ DERIVO

SAPPIAMO CHE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

VERIFICHIAMOLO CON DH

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \to 0}{x \to 0} \underset{D.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

$$(\quad)\cancel{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3-9x+6}{5x^5+2x^4-33x+26} = \frac{3-9+6}{5+2-33+26} = \frac{0}{0}$$

$$(\quad)\cancel{(x-1)}$$

POSSIBILITA 1 SCOMPORRE

POSSIBILITA' 2 DE L'HOSPITAL

$$\lim_{x\to 1} \frac{9x^2-9}{25x^4+8x^3-33} \underset{DH}{=} \lim_{x\to 1} \frac{18\cancel{x}}{100x^{\cancel{3}\,2}+24x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 1} \frac{18}{100x^2+24x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{18}{100x^2+24x} = \frac{18}{124} = \frac{9}{62}$$