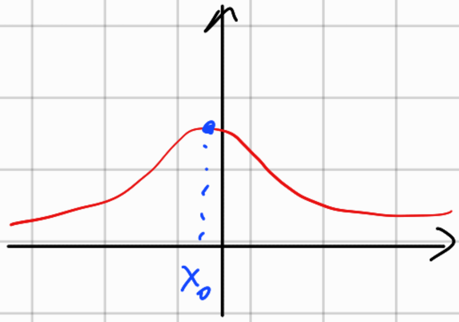
Lezione 19

18/11/24

DEFINIZIONE

$x_0 \in D$ è p.to di MASSIMO ASSOLUTO (MINIMO)

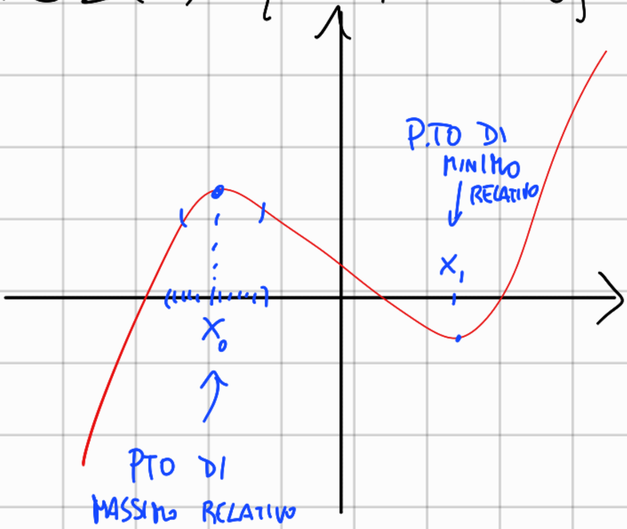
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D \qquad (\leq)$$



DEFINIZIONE

$x_0 \in D$ è p.to di MASSIMO RELATIVO (MINIMO) se $\exists\, I(x_0)$ t.c.

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\} \qquad (\leq)$$

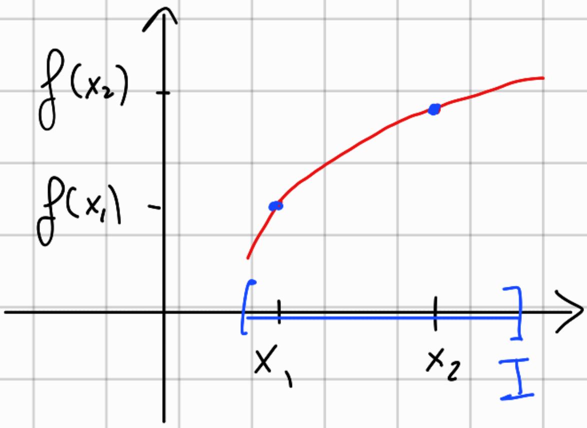


DEFINIZIONE

$f(x)$ si dice CRESCENTE (DECRESCENTE) in $I \subseteq D$ se $\forall x_1 < x_2 \in I$

INTERVALLO (a,b) oppure $[a,b]$

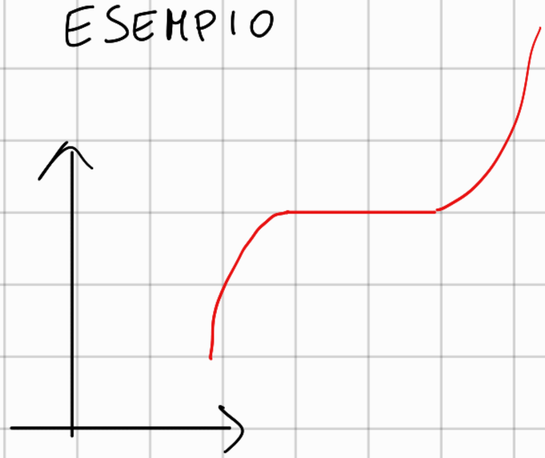
$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (\geq)$$



$f(x)$ SI DICE STRETTAMENTE CRESCENTE (DECRESCENTE) in $I \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 < x_2$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (>)$$

ESEMPIO



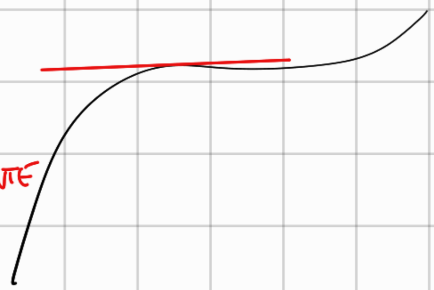
✓ CRESCENTE

✗ NON È STRETTAMENTE CRESCENTE

DEFINIZIONE

x_0 SI DICE P.TO STAZIONARIO SE

- f è DERIVABILE IN x_0
- $f'(x_0) = 0$ → LA RETTA TANGENTE È ORIZZONTALE

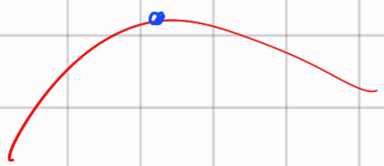


TEOREMA

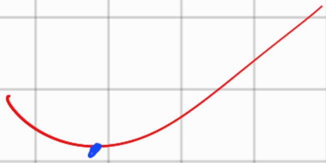
Se
- x_0 è MASSIMO oppure MINIMO RELATIVO
- f è DERIVABILE IN x_0

$\Rightarrow$ x_0 è STAZIONARIO cioè $f'(x_0) = 0$

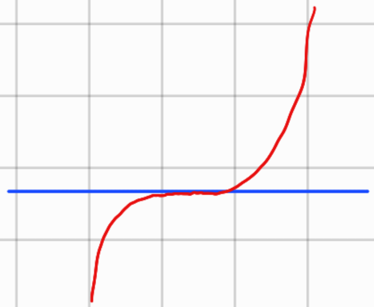
I PUNTI STAZIONARI POSSONO ESSERE



MASSIMI



MINIMI



FLESSI ORIZZONTALI

DIMOSTRAZIONE (PER IL MASSIMO)

x_0 è P.TO DI MASSIMO RELATIVO

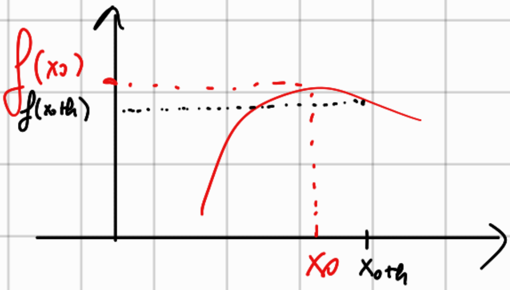
$\Downarrow$

$$\exists I(x_0) \text{ t.c. } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I(x_0)$$

$$f(x_0+h) \leq f(x_0)$$
$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$$

SICCOME f è DERIVABILE IN x_0 ESISTE FINITO

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} = f'_+(x_0) \leq 0 \quad \text{SE } h > 0$$



$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} = f'_-(x_0) \geq 0$$

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

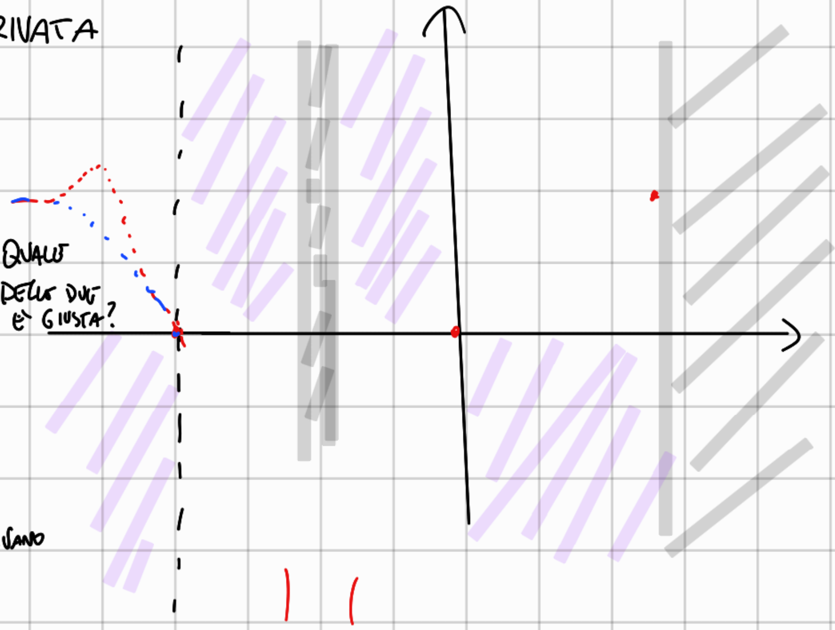
$$\downarrow$$

$$f'(x_0) = 0 \rightarrow x_0 \text{ STAZIONARIO} \quad \square$$

PER LO STUDIO DELLA DERIVATA

- SI CALCOLA $f'(x)$
- (SI CONTROLLA CHE $D' = D$)
  GUARDANDO CHE
  - AL DENOMINATORE
  - DENTRO LA RADICE
  - DENTRO I LOGARITMI

  etc.



COMPAIANO LE STESSE FUNZIONI CHE COMPARIVANO IN f.

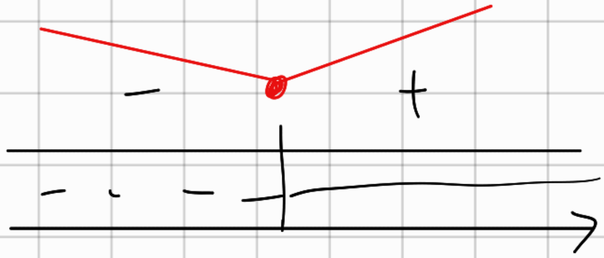
- STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

$$f'(x) \geq 0$$

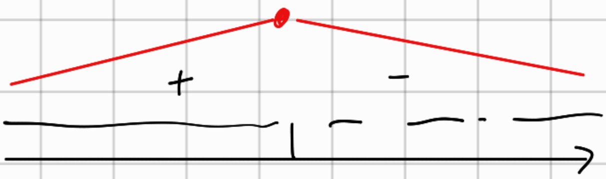
Se $f'(x) > 0$ IN I $\Rightarrow$ f e' CRESCENTE

$f'(x) < 0$ IN I_2 $\Rightarrow$ f e' DECRESCENTE

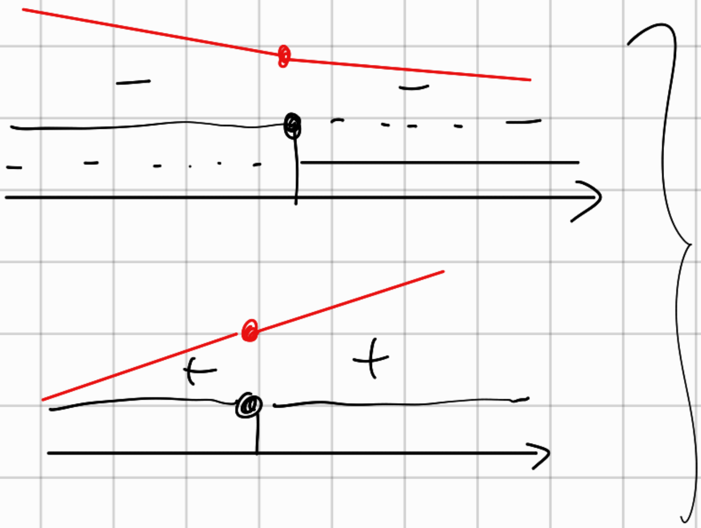
$f'(x) = 0$ IN $\{x_1, x_2\}$ $\rightarrow$ f e' STAZIONARIA



MINIMO



MASSIMO



FLESSO ORIZZONTALE

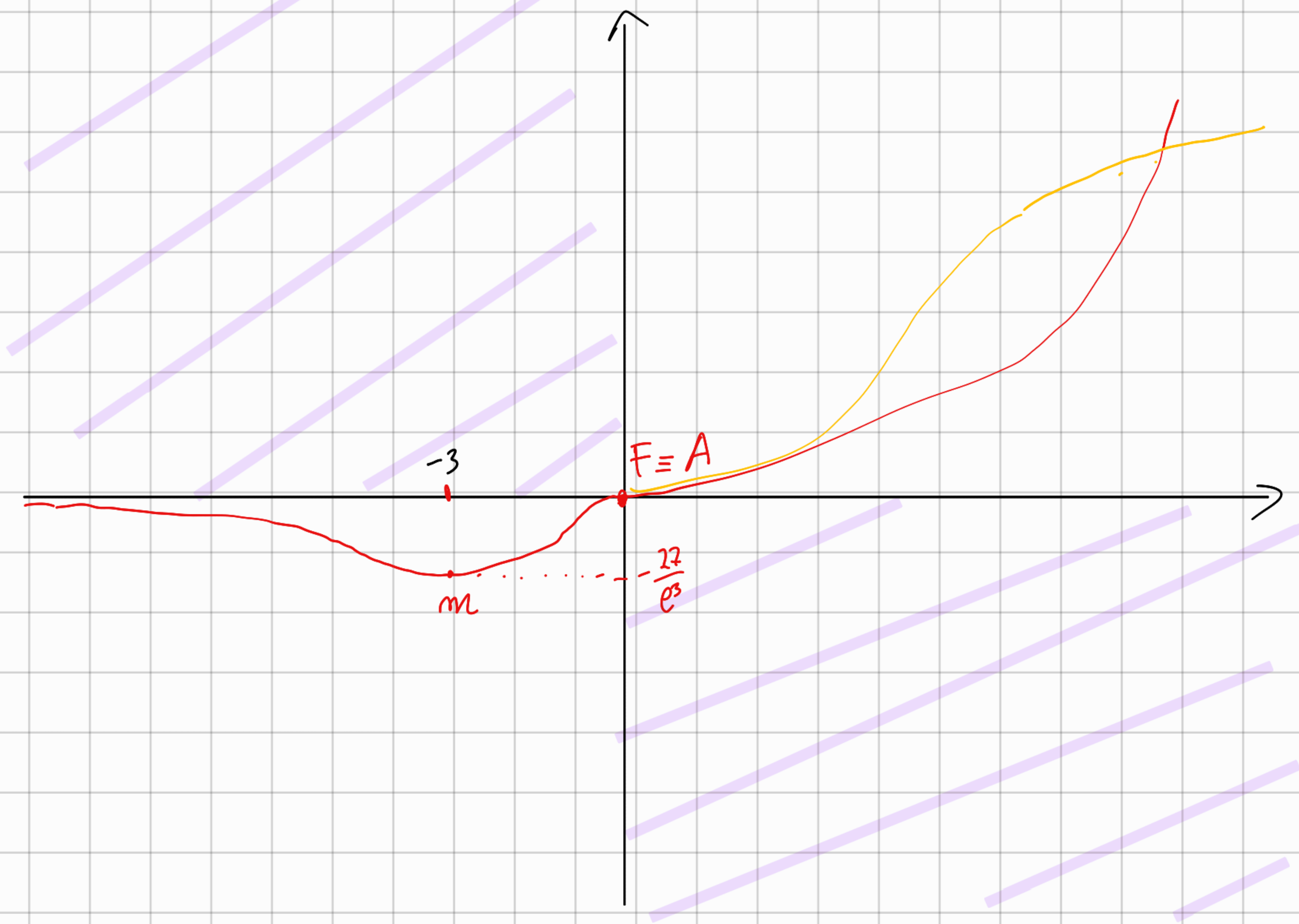
ESERCIZIO STUDIO DI FUNZIONE

$f(x) = e^x x^3$

$f(0)\ e^0 \cdot 0^3 = 1 \cdot 0 = 0$

- $D = \mathbb{R}$

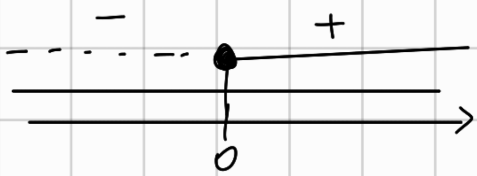
- INTERSEZIONE ASSE y $A = (0, f(0)) = (0,0)$



- STUDIO DEL SEGNO E INTERSEZIONI ASSE X

$f(x) \geq 0$ $\quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ (\forall x \in D)$

$e^x x^3 \geq 0$ $\quad x^3 \geq 0 \quad x \geq 0$



- f è POSITIVA SE $x \in (0, +\infty)$
- f è NEGATIVA SE $x \in (-\infty, 0)$, f è NULLA SE $x = 0$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\downarrow\atop -\infty}{x^3}\,\underset{\downarrow\atop 0}{e^x} = F.I$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 \to -\infty}{e^{-x} \to +\infty} \underset{DH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} \underset{DH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{e^{-x}} \underset{DH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\text{FINITO}}{6}}{\underset{\downarrow\atop -\infty}{-e^{-x}}} = 0$$

$$e^{-(x)} \quad -(x) \to -\infty \quad \to +\infty$$

$y=0$

A.OR. SX

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^x = +\infty$$

DERIVATA PRIMA

$e^x x^3$

- $f'(x) = e^x x^3 + e^x(3x^2) = e^x(x^3+3x^2) = x^2(x+3)e^x$

$x^2 \geq 0$

$\downarrow$

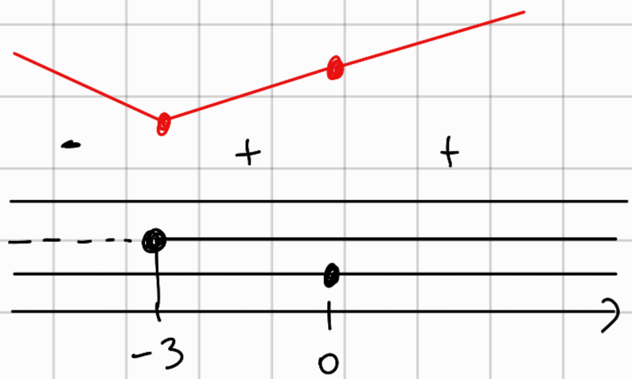
$\forall x \in \mathbb{R}$

SI ANNULLA IN $x=0$

- $x+3 \geq 0$

  $x \geq -3$

- $e^x \geq 0 \quad \forall \in \mathbb{R}$



- f è (STR) CRESCENTE per $x \in (-3,0) \cup (0,+\infty)$

- f è STR. DECRESCENTE per $x \in (-\infty,-3)$

- f è STAZIONARIA $x \in \{-3,0\}$

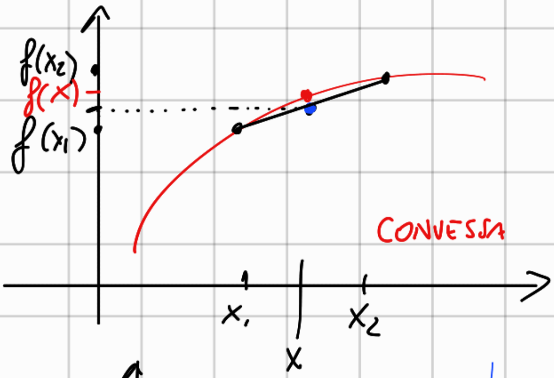
$m = \left(-3, f(-3)\right) = \left(-3, -\frac{27}{e^3}\right)$ P.TO DI MINIMO

$F = (0, 0) \equiv A$ P.TO DI FLESSO ORIZZONTALE

$$e^{-3}(-3)^3 = \frac{1}{e^3}(-27) = -\frac{27}{e^3} \simeq -1.34$$

DEFINIZIONE

$f(x)$ SI DICE CONVESSA $\boxed{\text{CONCAVA}}$ in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che collega i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sotto (sopra) della funzione



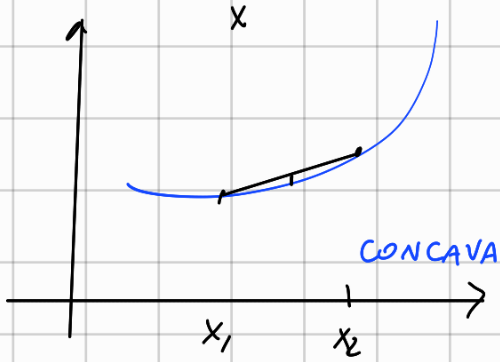
Cioè $\forall t \in [0, 1]$

PARAMETRIZZAZIONE DEL SEGMENTO

$t x_2 + (1-t)x_1$

SE $t = 0$ x_1

SE $t = 1$ x_2



$$\boxed{t f(x_2) + (1-t) f(x_1)} \overset{\geq}{\leq} f(\underbrace{t x_2 + (1-t) x_1}_{x})$$

$f(x)$

Se AL POSTO DI $\geq$ METTO $>$ f STRETTAMENTE CONVESSA

$\leq$ $<$ f STRETTAMENTE CONCAVA

ESEMPIO

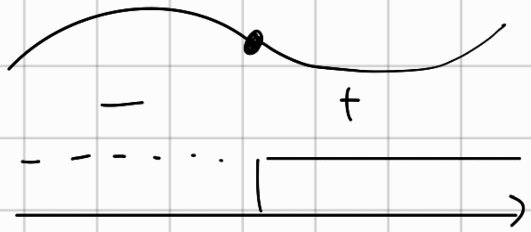
• QUESTA FUNZIONE È CONCAVA MA NON È STRETTAMENTE CONCAVA PERCHÉ È RETTILINEA IN UN INTERVALLO.

TEOREMA

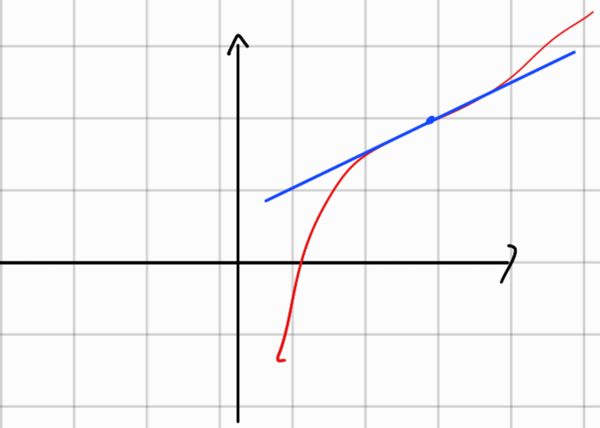
Se f STRETTAMENTE CONVESSA $\quad f''(x) > 0$

Se f STRETTAMENTE CONCAVA $\quad f''(x) < 0$

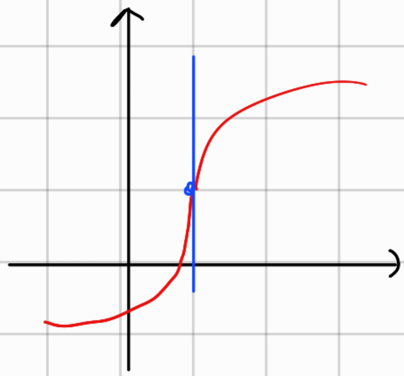
COSA SUCCEDE SE $f''=0$?



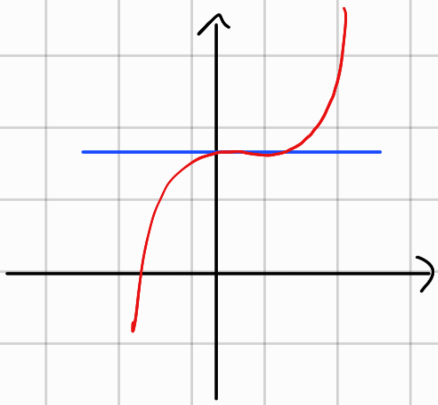
UN PUNTO IN CUI f'' CAMBIA SEGNO e $f''(x)=0$
SI DICE PUNTO DI FLESSO



FLESSO OBLIQUO
$f'(x) = m \neq 0$



FLESSO VERTICALE
$f'(x) = 0$



FLESSO ORIZZONTALE
$f'(x) \to \infty$

CONTINUO L'ESERCIZIO $\quad f(x) = x^3 e^3 \quad f'(x) = e^x(x^3+3x^2)$

- DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = e^x(x^3+3x^2) + e^x(3x^2+6x)$$

$$= e^x(x^3+6x^2+6x) = e^x x(x^2+6x+6) \geq 0$$

ATTENZIONE
GRAVE ERRORE
$\cancel{\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}}$

- $e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $x \geq 0$

$x^2+6x+6 \geq 0$

$\Delta = 36-24 = 12$

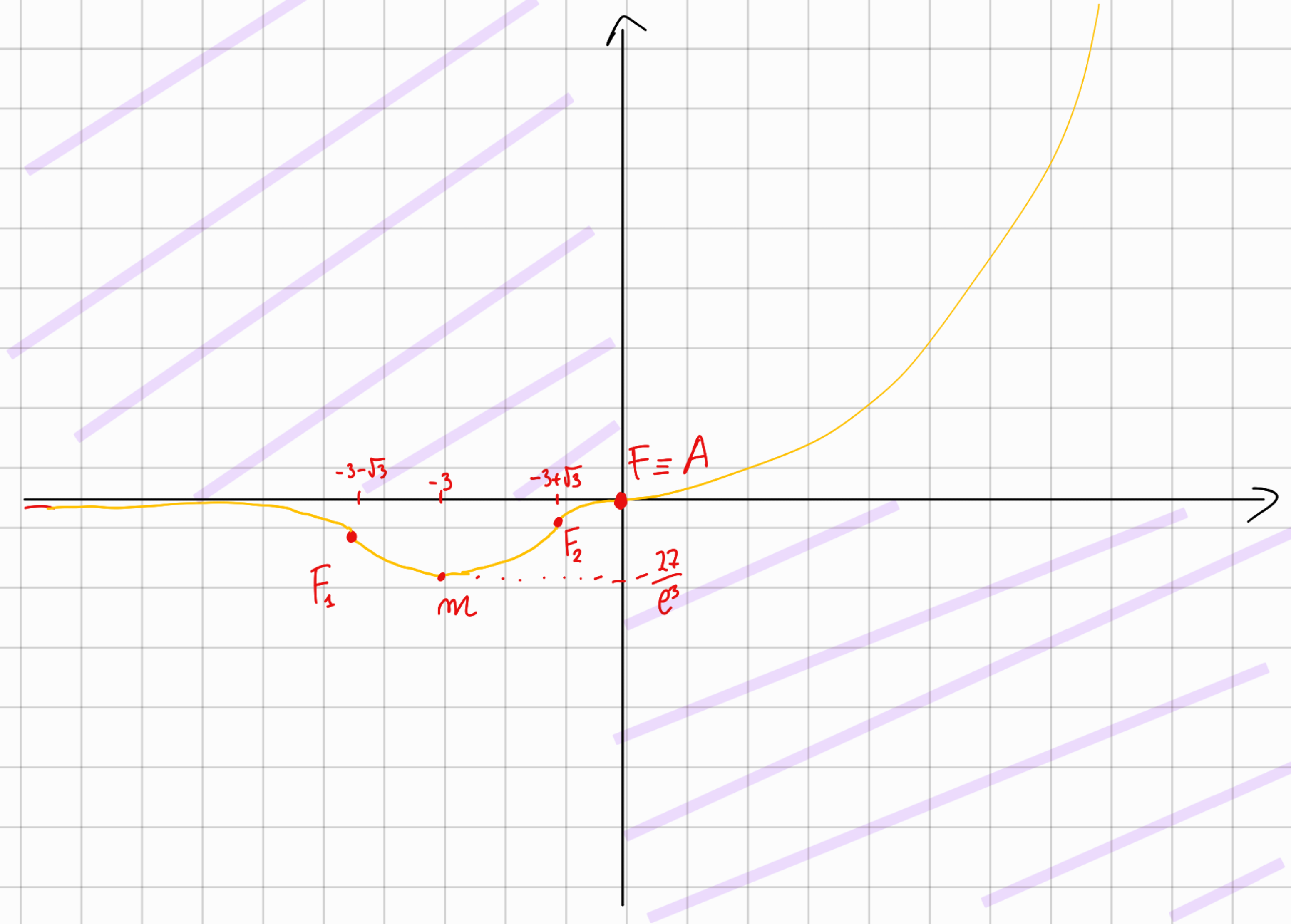
$x_{12} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

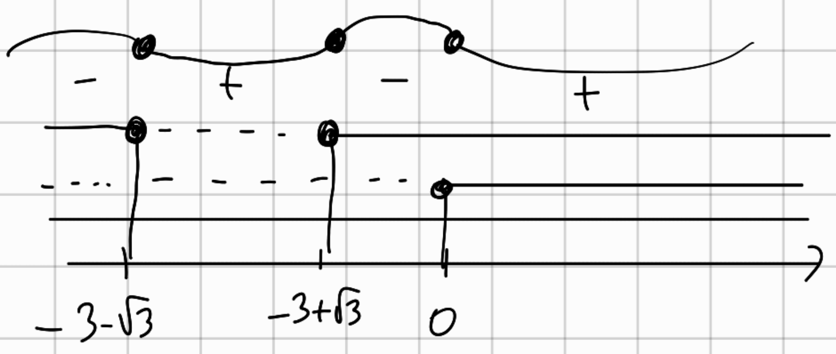
$x_1 = -3-\sqrt{3} \simeq -4.73$

$x_2 = -3+\sqrt{3} \simeq -1.26$

$\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$x < x_1 \lor x > x_2$





$F_1 = \left(-3-\sqrt{3},\ f(-3-\sqrt{3})\right)$ $\qquad f(-3-\sqrt{3}) = (-3-\sqrt{3})^3 e^{-3-\sqrt{3}} \simeq -0{,}93$

$F_2 = \left(-3+\sqrt{3},\ f(-3+\sqrt{3})\right)$ $\qquad f(-3+\sqrt{3}) \simeq -0{,}57$

$F = (0,0)$