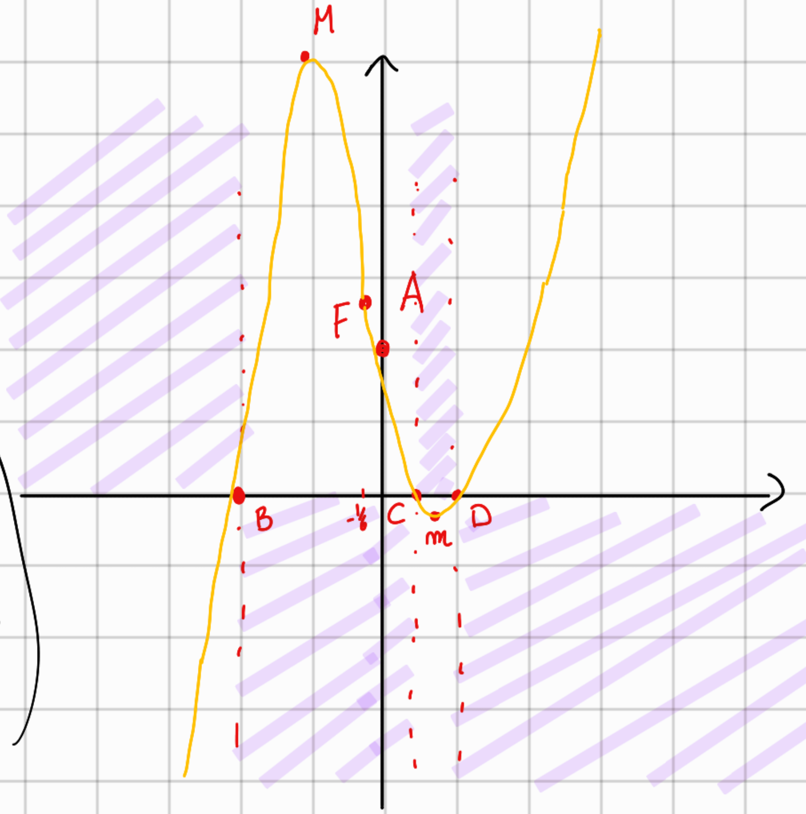
Lezione 20 19/11/24

STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$



- $D = \mathbb{R}$

- PARITÀ

$$f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 - 5(-x) + 2$$
$$= -2x^3 + x^2 + 5x + 2 \neq f(x)$$
$$\neq -f(x)$$

- INTERSEZIONE ASSE y

$f(0) = 2$ $\quad$ $A = (0, 2)$

- INTERSEZIONE ASSE x e STUDIO DEL SEGNO

$f(x) \geq 0$

$2x^3 + x^2 - 5x + 2 \geq 0$ $\quad$ 1 e' soluzione

$2 + 1 - 5 + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)$

	2	1	-5	2
1		2	3	-2
	2	3	-2	/

$(x-1)\underbrace{(2x^2+3x-2)} \geq 0$

$\left(f(x) = (x-1)(x+2)(x-\frac{1}{2}) \right)$

$x - 1 \geq 0$

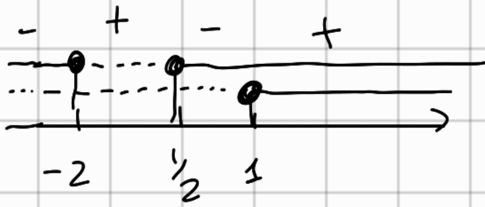
$x \geq 1$

$2x^2 + 3x - 2 \geq 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$ $\quad x_1 = -2$, $\quad x_2 = \frac{1}{2}$

$x \leq -2 \vee x \geq \frac{1}{2}$



f è POSITIVA per $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

f è NEGATIVA per $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

f è NULLA per $x \in \left\{-2, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$$B = (-2, 0) \quad C = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad D = (1, 0)$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \to -\infty} \overset{-\infty}{2x^3} + \overset{+\infty}{x^2} \overset{+\infty}{- 5x} + 2 = -\infty$$ PER CONFRONTO DI INFINITI

DIMOSTRAZIONE

$$\left(\lim_{x \to -\infty} \left(2 \underbrace{\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}_{1} + \underbrace{\frac{x^2}{x^3}}_{0} - 5 \underbrace{\frac{x}{x^{3}}}_{0} + \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{0} \right) x^3 = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty \right)$$ NO ASINTOTO ORIZZONTALE

CONTROLLO ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 2}{x} \; \frac{\infty}{\infty} = \infty$$ NO ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 2}{x} = \infty$$

NO AS. ORIZZ. — NO AS. OBLIQUO

DERIVATA PRIMA (PER CERCARE MASSIMI E/O MINIMI)

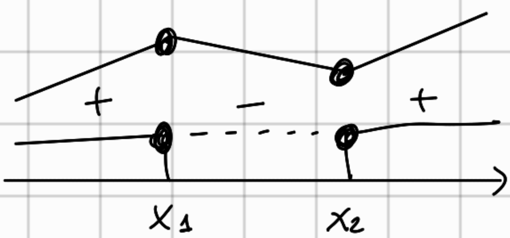
$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 2x - 5 = 6x^2 + 2x - 5 \geq 0$$

$124/2 = 62/2 \quad 31$

$$\Delta = 4 + 120 = 124$$

$$\sqrt{124} = \sqrt{4 \cdot 31} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{31} = 2\sqrt{31}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{31}}{12} \to \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{31}}{6} \simeq -1.09 \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{31}}{6} \simeq 0.76$$



f è CRESCENTE per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

f è DECRESCENTE per $x \in (x_1, x_2)$

f è STAZIONARIA per $x \in \{x_1, x_2\}$

$$M = (x_1, f(x_1)) \simeq (-1.09, 6.04) \qquad m(x_2, f(x_2)) \simeq (0.79, -0.34)$$

DERIVATA SECONDA

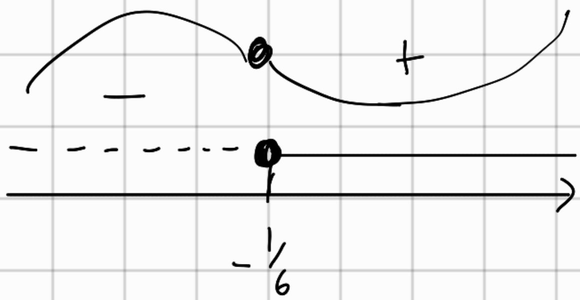
$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 5$$

$$f''(x) = 12x + 2 \geq 0$$

$12x + 2 \geq 0$

$12x \geq -2$

$x \geq -\frac{1}{6}$



f è CONCAVA per $x \in (-\infty, -1/6)$

f è CONVESSA per $x \in (-1/6, +\infty)$

f presente un p.to di flesso per $x = -1/6$

$$F(-1/6, f(-1/6)) \simeq (-0.16, 2.85)$$

$$f(-\tfrac{1}{6}) = 2\left(-\frac{1}{6}\right)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{6}\right) + 2 \simeq 2.85$$

ESERCIZIO

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$$

DOMINIO $\rightarrow$ C.E. • $\dfrac{2}{x^2+1} > 0$

$D = \mathbb{R}$

$2 > 0$ | $x^2+1 > 0$

$\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$

• $x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 \neq -1$

INT. ASSE y

$$f(0) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) = \ln(2) \simeq 0.69 \qquad A(0, \ln 2)$$

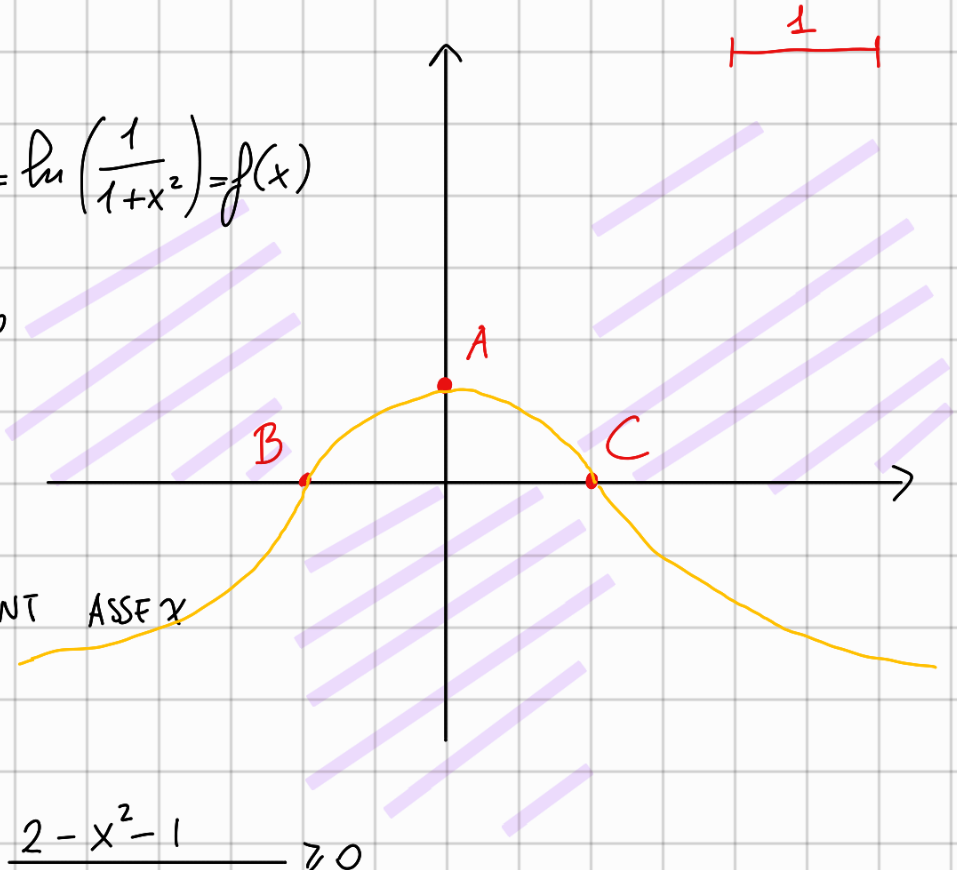
PARITA'

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1}{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = f(x)$$

$\Rightarrow f$ e' PARI

$\downarrow$

SIMMETRICA RISPETTO ALL'ASSE y



STUDIO DEL SEGNO E INT ASSE x

$$\ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right) \geq 0$$

$$e^{\ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right)} \geq e^0$$

$$\frac{2}{x^2+1} \geq 1$$

$$\frac{2}{x^2+1} - 1 \geq 0$$

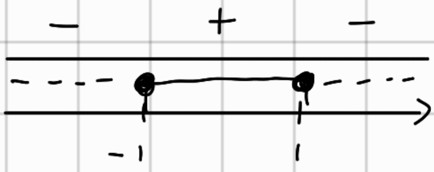
$$\frac{2-x^2-1}{x^2+1} \geq 0$$

$$\frac{1-x^2}{x^2+1} \geq 0$$

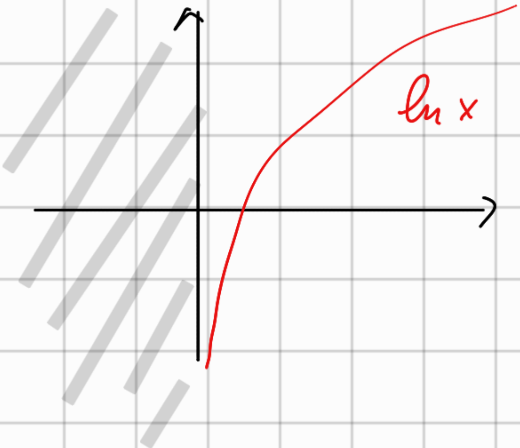
$1-x^2 \geq 0$ | $x^2+1 > 0$

$x^2 \leq 1$ | $\forall x \in \mathbb{R}$

$-1 \leq x \leq 1$



f è NEGATIVA per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
f è POSITIVA per $x \in (-1, 1)$
f è NULLA per $x \in \{-1, 1\}$



$B = (-1, 0)$ $C = (1, 0)$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right) = -\infty$$

PERCHÉ f è PARI

$x^2 \to +\infty$

$\ln\left(\frac{2}{+\infty}\right)$ $\ln(0^+)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)}{x} \underset{DH}{=} \lim \frac{\frac{\cancel{1+x^2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{-\cancel{2}(2x)}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

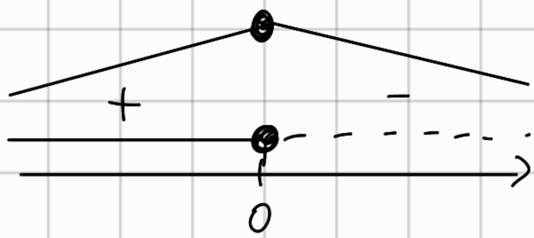
$\ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right) \to -\infty$ $x \to +\infty$

NON C'È L'ASINTOTO OBLIQUO (è richiesto $m \neq 0, \pm\infty$)

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{-2x}{1+x^2} \geq 0$$

$-2x \geq 0$ | $1+x^2 > 0$
$x \leq 0$ | $\forall x \in \mathbb{R}$



$M \equiv A = (0, \ln(2))$ PTO DI MASSIMO

f CRESCENTE per $x \in (-\infty, 0)$
f DECRESCENTE per $x \in (0, +\infty)$
f STAZIONARIA per $x = 0$

DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)+2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2-2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

$$\frac{2x^2-2}{2} \geq \frac{0}{2}$$

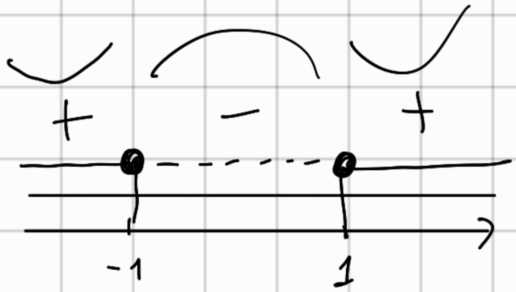
$x^2-1 \geq 0$

$x^2 \geq 1$

$x \leq -1 \lor x \geq 1$

$(1+x^2)^2 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$



$F_1 \equiv B = (-1,0)$ SONO PUNTI DI FLESSO

$F_2 \equiv C = (1,0)$

ESERCIZIO DI OTTIMIZZAZIONE (Compito N. 3 14 feb 2023)

$S(\lambda) = 4e^{\lambda-\lambda^2}$ funzione che descrive la sensibilità

PER TROVARE IL MASSIMO CALCOLO $S'(\lambda)$

$$S'(\lambda) = 4e^{\lambda-\lambda^2}(1-2\lambda) \geq 0$$

$4e^{\lambda-\lambda^2} \geq 0$

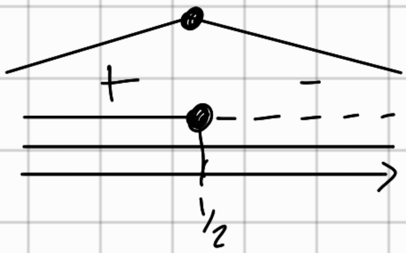
$e^{\lambda-\lambda^2} \geq 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$1-2\lambda \geq 0$

$-2\lambda \geq -1$

$\lambda \leq \frac{1}{2}$



Lo strumento sarà maggiormente sensibile a una lunghezza d'onda di $\lambda = \frac{1}{2}\ \mu m$ ($0.5\ \mu m$)

La sensibilità massima corrisponde a $S\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 4e^{\frac{1}{4}} = 4\sqrt[4]{e}$

IS
5.14