Lezione 21 22/11/24

L'INTEGRALE INDEFINITO

Finora $f(x) \longrightarrow f'(x)$ da una funzione abbiamo ricavato le sue derivate.

ADESSO CI PONIAMO LA DOMANDA INVERSA

Data $f(x)$ funzione esiste un'altra funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ è detta una $\boxed{\text{PRIMITIVA}}$ di $f(x)$.

F NON È UNICA, infatti

Teorema

Date f, F funzioni tali che $F'(x) = f(x)$

$G(x)$ è una primitiva di $f \iff G(x) = F(x) + c$

ESEMPIO

$f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$

$G(x) = x^2 + 2 \qquad G'(x) = 2x = f(x)$

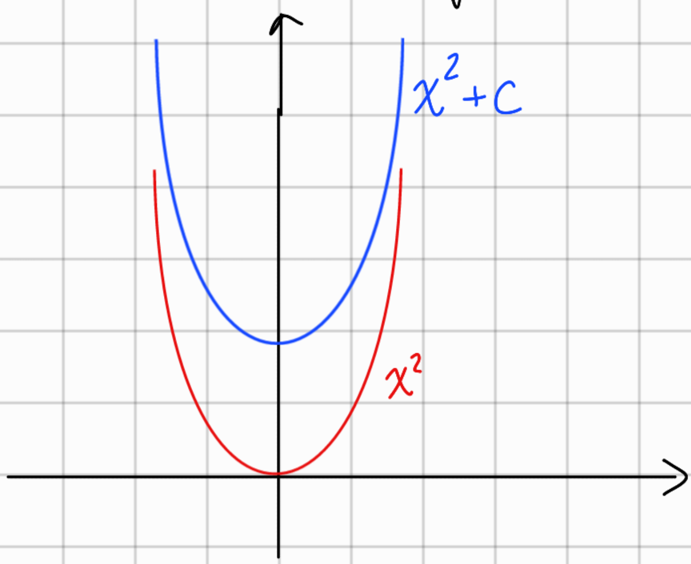
DEFINIZIONE

Data $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$$

L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE DI f

è chiamato $\boxed{\text{INTEGRALE INDEFINITO}}$ DI f.



SCRIVERÒ

DIFFERENZIALE

$$\int 2x\,dx = \boxed{x^2+c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\iff [x^2+c]' = 2x$$

$$\int ax\,dx = \frac{a}{2}x^2 + c$$

$$\left(\int ax\,da = \frac{x}{2}a^2 + c\right)$$

[dx RAPRESENTA UN INCREMENTO INFINITESIMO DELLA x, A NOI SERVIRÀ A CAPIRE RISPETTO A QUALE VARIABILE INTEGRARE]

$\alpha \in \mathbb{R}$

ESEMPI

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

VERIFICA

$$\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]' = \frac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\right]' =$$

$$= \cancel{\frac{1}{\alpha+1}}\cancel{(\alpha+1)}x^{\alpha} = x^{\alpha} \checkmark$$

$$\int x^{7} dx = \frac{x^{8}}{8} + c$$

$\downarrow$

$$\frac{1}{8}\int 8x^{7} dx = \frac{1}{8}x^{8} + c$$

- $-\underbrace{\int(-\sin x)dx}_{} = -\cos x + c$

- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

- $\int a^{x} dx = \frac{1}{\ln(a)} a^{x} + c$

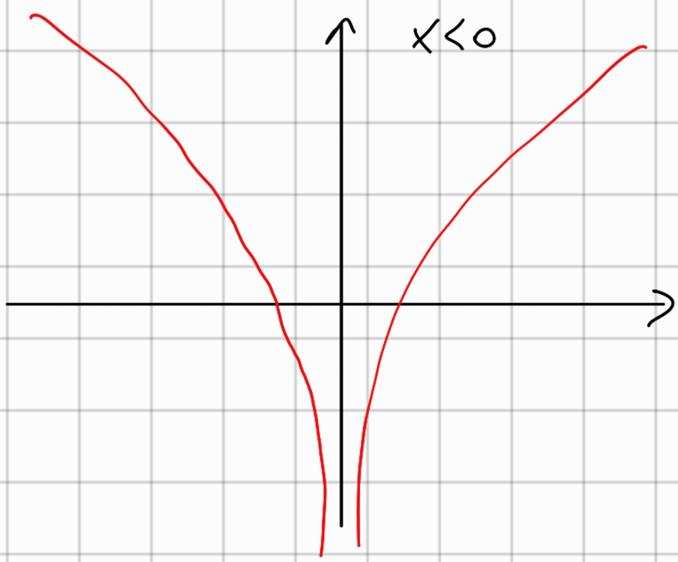
$$\int e^{x} dx = e^{x}$$

- $\int \frac{1}{x} dx = \boxed{\ln|x| + c}$

$x > 0$

$x \neq 0$

$\ln(x)$ NON È DEFINITA $x<0$

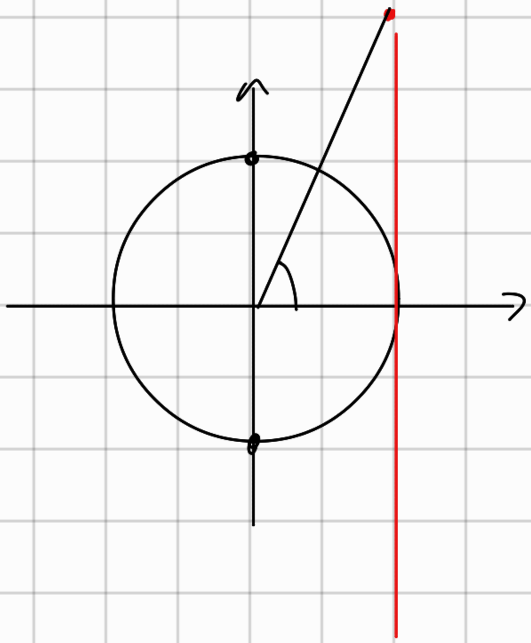


$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg(x) \qquad ctg(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctg(x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\, x + c \iff [arctg(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$$



NOTA: NON TUTTE LE FUNZIONI HANNO UNA PRIMITIVA ESPRIMIBILE IN FORMA CHIUSA

esempio $F(x) = \int e^{-x^2}\,dx$

↑

è una funzione della quale non conosciamo la legge esplicita. Per calcolarla si usano delle tecniche matematiche più avanzate.

PROPRIETÀ (LINEARITÀ)

- $\int \alpha f(x)dx \quad \alpha \int f(x)dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f$

- $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad \forall f, g$

INTEGRALE DEL PRODOTTO → NON ESISTE UN'UNICA FORMULA VALIDA PER TUTTI I CASI

POSSIBILITÀ 1 INTEGRALE PER PARTI

$$\int [fg]' = \int f'g + \int g'f$$

$$fg = \int f'g + \int g'f$$

$$\int f'g + \int g'f = fg$$

$$\boxed{\int f'g = fg - \int g'f}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

ESEMPIO

$$\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\cos x}_{f'} dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx \boxed{= x \sin x + \cos x + c}$$

$g' = 1 \qquad f = \sin x$

$$\int \ln x \, dx = \cancel{\frac{1}{x} + c}$$

ERRORE COMUNE

$$fg - \int g'f$$

$$\int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \, dx = x \ln x - x + c$$

$f = x \qquad g' = \frac{1}{x}$

PER CASA

$$\boxed{\int \operatorname{arctg} x \, dx}$$

POSSIBILITÀ 2

LA FUNZIONE DENTRO L'INTEGRALE VIENE DA UNA DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\int (2x)(e^{x^2}) \, dx = e^{x^2} + c$$

$$[e^{x^2}]' = 2x e^{x^2}$$

$$\boxed{\int g'(x) f'(g(x)) \, dx = f(g(x)) + c}$$

- UNA DELLE DUE È UNA FUNZIONE COMPOSTA $f'(g(x))$
- L'ALTRA È LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INTERNA : $g'(x)$

NOTA : POTREBBE ESSERE NECESSARIO MOLTIPLICARE PER UNA COSTANTE

$$3 \int \underbrace{\frac{1}{3}}_{g'(x)} \underbrace{\cos\left(\frac{x}{3}\right)}_{f'(g(x))} dx = 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3} x\right)' = \frac{1}{3}$$

$f'(x) = \cos x$

$f(x) = \sin x$

$$\int \sqrt{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\int 4\underbrace{(4x+1)}^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{4}\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

ATTENZIONE POSSO MOLTIPLICARE E DIVIDERE SOLO PER COSTANTI $5, \frac{1}{2}, e^{\pi}$ ok

$2x, x^3, \cos x$ NO

ALTRO ESEMPIO

$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \ln|x^3+1|+c$$

SE AL NUMERATORE TROVIAMO LA DERIVATA DEL DENOMINATORE

- INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

COME QUANDO RISOLVIAMO

$\cos^2 x + \cos x - 2 \geq 0$

$t^2 + t - 2 \geq 0$

$t = \cos x$

ESEMPIO

$$\int \cos^2(x)\sin x\,dx$$

$$-\int \underbrace{\cos^2 x}_{t^2}\,\underbrace{(-\sin x\,dx)}_{dt}$$

$t = \cos x$

REGOLA

$dt = -\sin x\,dx$

$$-\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3}+c = -\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

$t = f(x)$

$dt = f'(x)\,dx$

$g(t) = x$

$g'(t)\,dt = dx$

L'INTEGRALE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

N, D POLINOMI

I grado (N) < grado (D) ? se sì PASSA ALLA FASE 2

SE NO grado (N) $\geq$ grado (D)

$\downarrow$

SI FA LA DIVISIONE TRA POLINOMI

$$\begin{array}{l|l} N(x) & D(x) \\ \hline & Q(x) \\ R(x) & \end{array}$$

RESTO

grado R < grado D

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$\int \frac{\cancel{D(x)}\,Q(x)}{\cancel{D(x)}}\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

$$\underbrace{\int Q(x)\,dx}_{\text{LO SAPPIAMO FARE}} + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

DOVE grado R(x) < grado D(x)

$$\begin{array}{rl|l} & N(x) & D(x) \\ & x^3+2x^2+x+1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} & -x^3 \qquad -x & x+2 \\ \cline{2-2} & /\quad 2x^2 \qquad +1 & \downarrow \\ & -2x^2 \qquad -2 & Q(x) \\ \cline{2-2} & / \qquad -1 & \\ & R(x) & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \int (x+2)\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \operatorname{arctg}(x) + c$$

FASE 2 (NON LO FACCIAMO PER $D(x)$ QUALSIASI) IN QUESTO CASO $\text{grado}(D) \leq 2$

PRIMA COSA DA FARE
CONTROLLARE SE SI PUÒ RICONDURRE

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

ESEMPIO

$$\int \frac{x-1}{\underbrace{x^2-2x+3}_{2x-2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3| + c$$

ESEMPIO: $\text{grado}(D) = 1$

$$\int \frac{1}{3x-7}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x-7}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x-7| + c$$

Se $\text{grado}(D) = 2$ CI SONO 3 PROCEDIMENTI DIVERSI A SECONDA DI
- $\to \Delta < 0$
- $\to \Delta = 0$
- $\to \Delta > 0$