Lezione 22 25/11/24

Se $\Delta > 0$ ci sono due soluzioni distinte x_1, x_2,

- Scomporre il denominatore $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

grad(N) $\in \{0,1\}$

$$\frac{N(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{N(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right]$$

CERCARE DUE COSTANTI $A, B \in \mathbb{R}$ tali che sia vera questa?

ESEMPIO

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$$

$2x-1 \neq k(5x-1)$

$\Delta = 1-4\cdot(-2) = 1+8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}\,dx$$

$$\frac{\boxed{5x-1}}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{Ax-2A+Bx+B}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{\boxed{(A+B)x-2A+B}}{(x+1)(x-2)}$$

$$\begin{cases} A+B = 5 \\ -2A+B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 5-B \\ -2(5-B)+B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 5-B \\ -10+2B+B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 5 - B \\ 3B = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 5 - 3 = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

$$\int \left[\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} \right] dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx$$

$$= 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$2 \int \frac{1}{x+1} dx + 3 \int \frac{1}{x-2} dx = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + c$$

Se $\Delta = 0 \rightarrow$ due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$

$$\int \frac{2x-3}{\underbrace{x^2-4x+4}_{\text{DERIVATA} = 2x-4}} dx =$$

- SE IL NUMERATORE È DI GRADO 1 POSSO - MOLTIPLICARE PER UNA COSTANTE - AGGIUNGERE E TOGLIERE UNA COSTANTE PER SPEZZARE LA FUNZIONE IN QUESTO MODO

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$$x_1 = x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\int \frac{2x - 3 - 1 + 1}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4} dx$$

$$= \ln|x^2 - 4x + 4| + \dots$$

$$\dots \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int 1 \cdot (x-2)^{-2} dx = \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

DERIVATA DI $(x-2)$

QUANDO AL NUMERATORE HO UNA COSTANTE POSSO RICONDURMI A $\int (x-a)^{-2} dx = -\frac{1}{x-a} + c$

$$= \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x-3}{x^2-4x+4} dx = \ln|x^2-4x+4| - \frac{1}{x-2} + c$$

RICORDO ⚠ ERRORE GRAVE

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

$$\frac{A}{B+C} \neq \frac{A}{B} + \frac{B}{C}$$

SE $\Delta < 0$

$$\left[\operatorname{arctg}(x)\right]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[\operatorname{arctg}(f(x))\right]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$$

- SE IL NUMERATORE È DI GRADO 1 FACCIO LO STESSO PROCEDIMENTO INIZIALE NEL CASO $\Delta = 0$

$\Delta = 4-8 = -4 < 0$

COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

$$(x-a)^2 + b = x^2 - 2ax + a^2 + b \Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ a^2 + b = +2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

DERIVATA DI $(x+1)$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

QUESTO È UN ESEMPIO FACILE

ESEMPIO DIFFICILE

① FACCIO IL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

$$\int \frac{3}{4x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{3}{\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

FACCIO LA RADICE QUADRATA DI $4x^2$

$$\left(2x-a\right)^2+b$$
$$4x^2-4ax+a^2+b \rightarrow \begin{cases} -4a=-2 \\ \frac{1}{4}+b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{4} \end{cases}$$

② DEVO FARE COMPARIRE IL $+1$ AL DENOMINATORE MOLTIPLICANDO PER $\frac{1}{b}$ "SOPRA" e "SOTTO"

$$\int \frac{3\cdot\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\,dx = \int \frac{4}{\frac{4}{3}\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx \quad \text{ok}$$

③ PORTO "DENTRO" IL QUADRATO $\frac{1}{b}$ FACENDONE LA RADICE QUADRATA

$$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \int \frac{4}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}2x-\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{4}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}\,dx$$

è NELLA FORMA $(mx+q)^2$ ok

④ MOLTIPLICO PER UNA COSTANTE "DENTRO" E "FUORI" L'INTEGRALE IN MODO CHE AL NUMERATORE CI SIA m

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}\int \frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}\,dx = \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+c$$

m m

ESEMPIO DI CASO PIÙ GENERALE IN CUI IL NUMERATORE È DI GRADO 1

$$\int \frac{4x+\frac{1}{2}}{4x^2-2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{8x+1}{4x^2-2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{8x-2+2+1}{4x^2-2x+1}\,dx = \underbrace{\int\frac{8x-2}{4x^2-2x+1}\,dx}_{=\ln|4x^2-2x+1|+c} + \underbrace{\int\frac{3}{4x^2-2x+1}\,dx}_{\text{PROCEDIMENTO DELL'ARCTG}}$$

DERIVATA $8x-2$

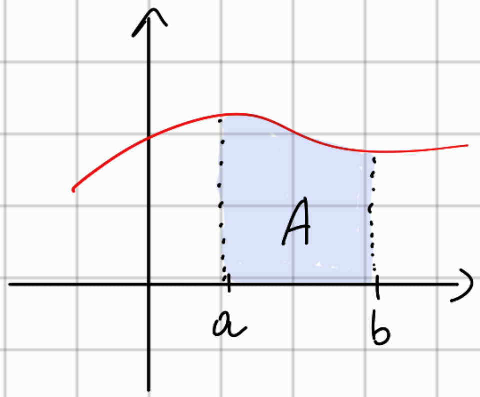
MOLTIPLICO PER 2 PER OTTENERE $8x$

AGGIUNGO E TOLGO -2

SPEZZO

L' INTEGRALE DEFINITO

Data $f(x) > 0 \quad \forall x \in D$

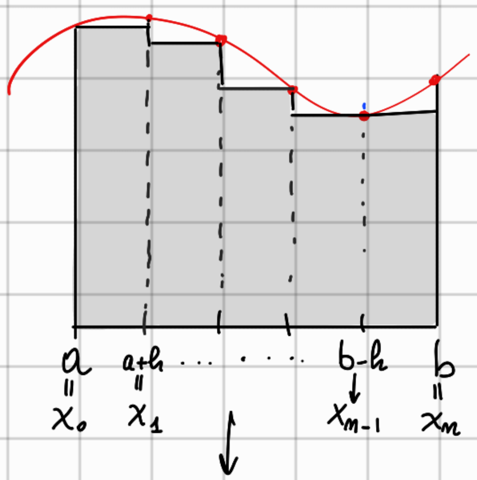


A è l'area SOTTESA da f per $x \in [a,b] \subseteq D$

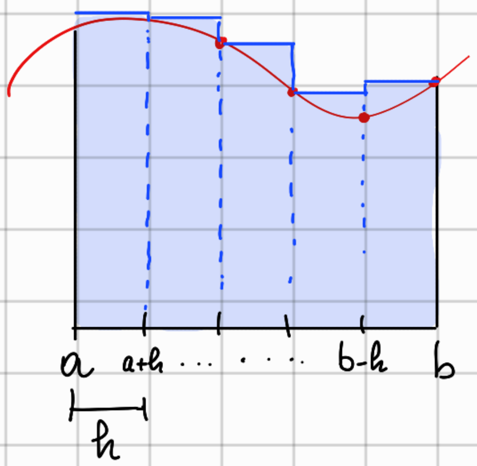
COME LA CALCOLO ?

$$h = \frac{b-a}{n} \leftarrow \text{INCREMENTO}$$

- SUDDIVIDO $[a,b]$ in n parti uguali



APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO



APPROSSIMAZIONE PER ECCESSO

$$\sum_{k=1}^{n} \text{area rettangoli neri} \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} \text{area rettangoli blu}$$

Come calcolo l'area del k-esimo rettangolo ?

Area rettangolo = base × altezza

$$\text{base} = h$$

$$\text{altezza} \begin{cases} = m_k & \text{se approssimo per difetto} \\ = M & \text{se approssimo per eccesso} \end{cases}$$

(MINIMO ASSOLUTO NELL' INTERVALLINO) (MASSIMO ASSOLUTO NELL' INTERVALLINO)

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad , \quad M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

$[x_{k-1}, x_k] \rightarrow$ k-esimo intervallo

ALLORA

$$\sum_{k=1}^{n} (h\, m_k) \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} (h\, M_k)$$

$$h \sum_{k=1}^{n} m_k \leq A \leq h \sum_{k=1}^{n} M_k \qquad h = \Delta X = X_2 - X_1$$

INCREMENTO FINITO

$\sum_{k=1}^{n} m_k$ = s_n ← SOMME INFERIORI

SOMME SUPERIORI ← S_n

$$\text{Se} \quad \lim_{h \to 0} s_n = \lim_{h \to 0} S_n = S := \int_a^b f(x)\, dx$$

dx → INCREMENTO INFINITESIMO

CIOÉ $(n \to \infty)$

↑ PER IL TEO CARABINIERI

↑ DEFINISCO

DIRÒ CHE f è $\boxed{\text{INTEGRABILE SECONDO RIEMANN}}$

CHIAMERÒ

$S = \int_a^b f(x)\, dx$ INTEGRALE $\boxed{\text{DEFINITO}}$ DELLA FUNZIONE f DA a a b

- ESISTONO CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'INTEGRABILITÀ

Se $\forall x \in [a,b)$

1) f CONTINUA $\Rightarrow$ f INTEGRABILE

oppure

2) f LIMITATA e HA UN NUMERO FINITO DI DISCONTINUITÀ $\Rightarrow$ f INTEGRABILE

oppure

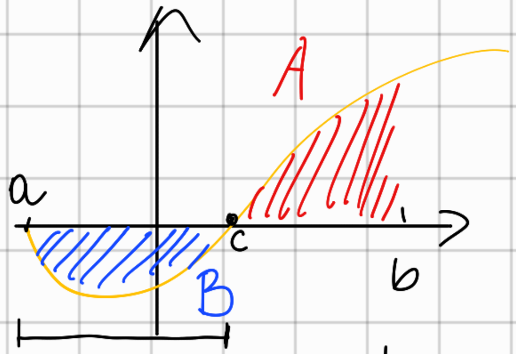
3) f MONOTONA $\Rightarrow$ f INTEGRABILE

NOTA:

ABBIAMO SUPPOSTO $f(x)>0$

Se $f(x)$ QUALSIASI

L'aree sotto l'asse x è
da considerare col segno negativo



ESEMPIO $\int_a^c f(x)dx = -5$ $\int_c^b f(x)dx = 6$

AREA B = 5   AREA A = 6

$$\int_a^b f(x)dx = A - B$$

A: AREA ROSSA POSITIVA

B: AREA BLU NEGATIVA

AREA TOTALE $11 \neq \int_a^b f(x)\,dx = 1$