Lezione 24

29/11/24

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{\boxed{2x+5}}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2}{2x+5}\,dx} = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + c$$

$$\int \underbrace{(x+2)}\,\underbrace{\cos(x^2+4x)}_{2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x+4)}\cos(\underbrace{x^2+4x})\,dx = \underline{\frac{1}{2}\sin(x^2+4x)+c}$$

$$\int g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$f(g(x)) + c \qquad f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(x)$$

- Determina tra le primitive di $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ quale passa per

$A = (0, \ln(2)) \Rightarrow F(0) = \ln(2)$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{e^x+1} \\ y(0) = \ln(2) \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

$$\boxed{e^x = t} \longrightarrow \boxed{x = \ln(t)}$$

$$e^x\,dx = dt$$

$$dx = \frac{1}{e^x}\,dt = \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{t+1}} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{t^2+t}\, dt \qquad \Delta > 0$$

$$t^2+t = t(t+1)$$

$$f(x) = t$$
$$f'(x)dx = dt$$

$$\frac{\boxed{1}}{t(t+1)}$$

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} = \frac{tA + tB + B}{t(t+1)} = \boxed{\frac{(A+B)t + B}{t(t+1)}}$$

$$0t + 1 = (A+B)t + B$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -B = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \left[-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} \right] dt = -\int \frac{1}{t+1}\, dt + \int \frac{1}{t}\, dt$$

$$= -\ln|t+1| + \ln|t| + c$$

$$= -\ln|e^x+1| + \ln|e^x| + c$$

PERCHÉ $e^x > 0$

$$= -\ln(e^x+1) + \ln(e^x) + c$$

$$\boxed{y(x) = x - \ln(e^x+1) + c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 0 - \underline{\ln(2)} + c = \ln(2)$$

$$c = 2\ln(2)$$

$$\boxed{y(x) = x - \ln(e^x+1) + 2\ln(2)}$$

INTEGRALI E VELOCITÀ

- DEVO FARE UNA CAMMINATA
- OGNI SECONDO CAMBIO IL NUMERO DI PASSI CHE FACCIO

IL PRIMO SECONDO FACCIO UN PASSO
IL SECONDO SECONDO FACCIO DUE PASSI
⋮
IL SETTIMO SECONDO FACCIO SETTE PASSI

QUANTI PASSI HO FATTO IN TOTALE?

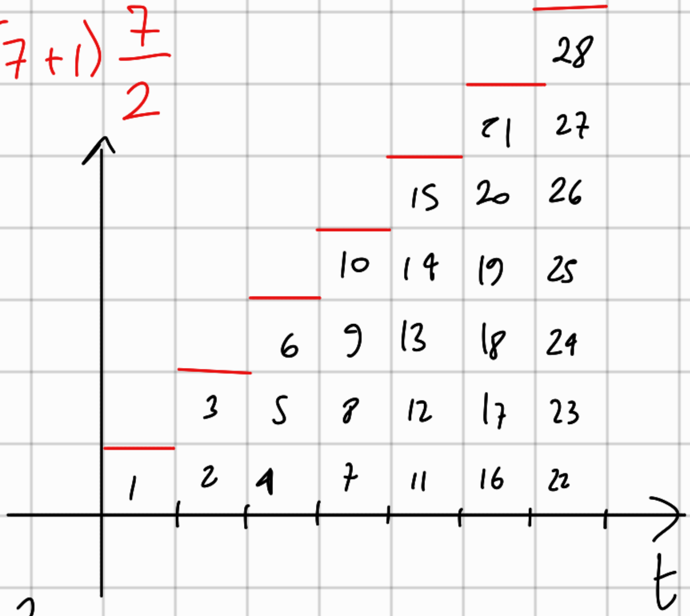
$$1+2+\underbrace{3+4+5}_{8}+6+7 = \sum_{i=1}^{7} i = \frac{(7+1)7}{2} = \frac{7\cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}} = 28$$

8

8

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

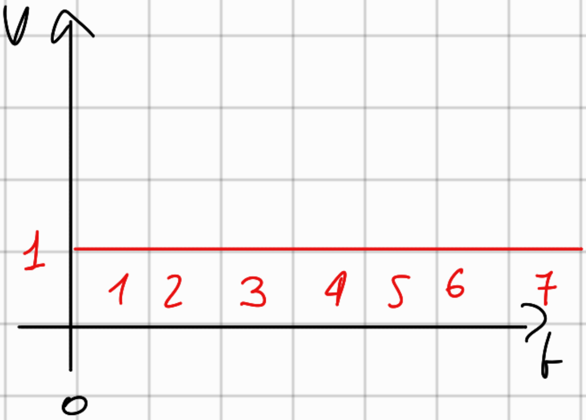
$$8 = (7+1)\frac{7}{2}$$



Se ABBIAMO UNA FUNZIONE CONTINUA?
Cioè il numero di passi non è un numero naturale ma reale?

Supponiamo di viaggiare a velocità costante

$v(t) = 1 \ \left(\frac{m}{s}\right)$



Quanti metri ho fatto dopo 7 secondi? 7 m

$$\int_0^7 1 \, dt = t\Big|_0^7 = 7$$

$\boxed{t_1 = t}$

$s(t)$ = spostamento t tempo $t_2 = t_1 + h$

$$v(t) = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_1+h) - s(t_1)}{h} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$v(t) = \lim_{h \to (0)} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = s'(t)$$

ANALOGAMENTE

$$s''(t) = v'(t) = a(t)$$

ESEMPIO

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

a costante (è C) UNA COSTANTE RAPPRESENTA LA VELOCITÀ INIZIALE QUINDI LA CHIAMO V_0

$$v(t) = \int a \, dt = ax + V_0$$

LA COSTANTE C RAPPRESENTA LA POSIZIONE INIZIALE QUINDI LA CHIAMO x_0

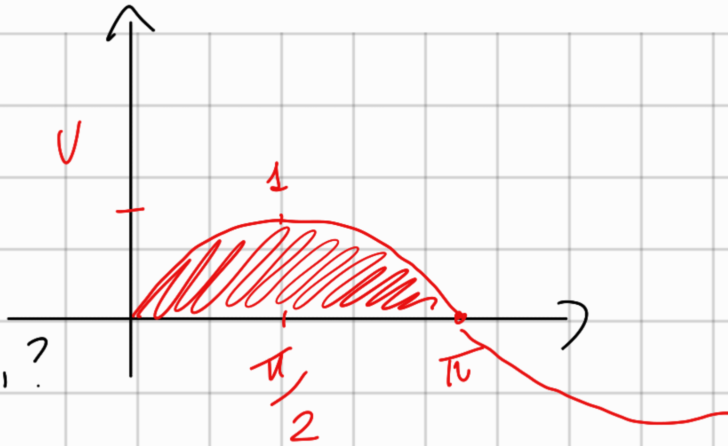
$$s(t) = \int (ax + V_0) dt = \boxed{a\frac{t^2}{2} + V_0 t + x_0}$$

ESERCIZIO

$V(t) = \sin(t)$ $\left(\frac{m}{s}\right)$ ← VELOCITÀ VARIABILE

$t_1 = 0$, $t_2 = \pi$

QUANTI METRI HO PERCORSO DOPO π SECONDI?



$$\int_0^\pi \sin(t)\,dt = -\cos(t)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 1+1 = 2$$

Il consumo energetico di un macchinario al tempo t (ore) è

$$C(t) = \frac{3t+2}{6t+1} \quad \left(J/s\right)$$

QUANTO HO CONSUMATO DOPO UN'ORA DALL'ACCENSIONE? $\frac{3t}{6t} = \frac{1}{2}$

$t=0$

$$\int_0^1 \frac{3t+2}{6t+1}\,dt =$$

$$\begin{array}{r|l} 3t+2 & 6t+1 \\ -3t-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline / \quad \frac{3}{2} & \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\cancel{\frac{3}{2}} \cdot 4}{6t+1}\,dt$$

$$\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{6}{6t+1}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln|6t+1|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\ln(7) - \underbrace{\ln(1)}_{0}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(7) = 0.98$$