Lezione 25

PROBABILITÀ

Serve a studiare eventi casuali.

- Lancio di un dado

QUALI SONO I POSSIBILI RISULTATI? $\{1,2,3,4,5,6\}$

CON QUALE PROBABILITÀ OTTENGO 6? $1/6 \simeq 0.16$

SE TIRO DUE DADI CON QUALE PROBABILITÀ LA SOMMA È 6?

Probabilità: definisce una misura di quanto un evento accade tra tutti i possibili risultati

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ → L'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI RISULTATI

DI EVENTI POSSIBILI $= n$

DI EVENTI CHE VOGLIO CONSIDERARE $= n_A$ $\quad A \subseteq \Omega$ ↓ $\{6\}$

NELL'ESEMPIO DEL DADO

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \left(\frac{1}{6}\right)$$

ESEMPIO: QUANTE VOLTE ESCE UN NUMERO PARI $A = \{2,4,6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

QUESTA DEFINIZIONE RICHIEDE
- Ω FINITO
- EVENTI TUTTI EQUIPROBABILI

DEFINIZIONE

Sia Ω INSIEME DETTO <u>SPAZIO DEGLI EVENTI</u> $\Rightarrow A \subseteq \Omega$ SI DICE EVENTO

Sia $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A) = \{A : A \subseteq \Omega\}$ L'INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω

Una probabilità su Ω è UNA FUNZIONE CHE SODDISFA QUESTI REQUISITI

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

$\forall A \in \mathcal{A}$

1. $P(A) \in [0,1]$

2. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

3. SE $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\downarrow$

A, B SONO DISGIUNTI

A, B EVENTI INCOMPATIBILI

ESEMPIO DEL DADO SE $A = \{6\}$, $B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{3, 4, 6\}$

SICCOME $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

$P(B) = \frac{2}{6}$

COMPLEMENTARE

$C_\Omega(A) = \Omega \setminus A$

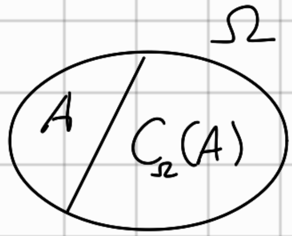
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$\forall A \subseteq \Omega$ "NON SI VERIFICA A"

$$P(C_\Omega(A)) = 1 - P(A)$$

$\underbrace{A}$ $\cup$ $\underbrace{C_\Omega(A)}$ $= \Omega$

SONO DISGIUNTI



DIMOSTRAZIONE

$$\underset{(2)}{1} = P(\Omega) = P(A \cup C_\Omega(A)) \underset{(3)}{=} P(A) + P(C_\Omega(A))$$

$$1 = P(A) + P(C_\Omega(A))$$
$$1 - P(A) = P(C_\Omega(A))$$

ESEMPIO $A = \{6\}$, $C_\Omega(A) = \{1,2,3,4,5\}$

$$P(C_\Omega(A)) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ESEMPIO: LANCIO DI UNA MONETA $\Omega = \{T, C\}$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \underset{\Omega}{\{T, C\}}\}$$

$P_1(\emptyset) = 0$, $P_1(\Omega) = 1$

$P_1(\{T\}) = 0.5 = 1/2$

$P_1(\{C\}) = 0.5 = 1/2$

$P_2(\emptyset) = 0$, $P_2(\Omega) = 1$

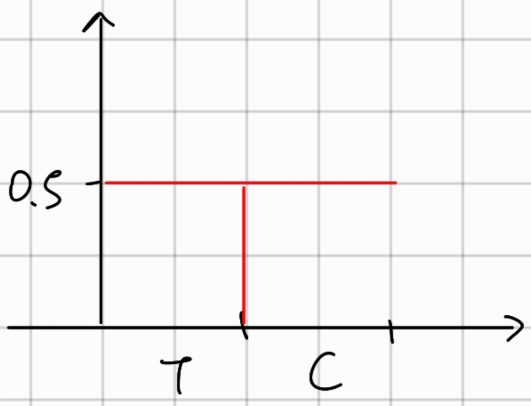
POTREI SCEGLIERE ANCHE

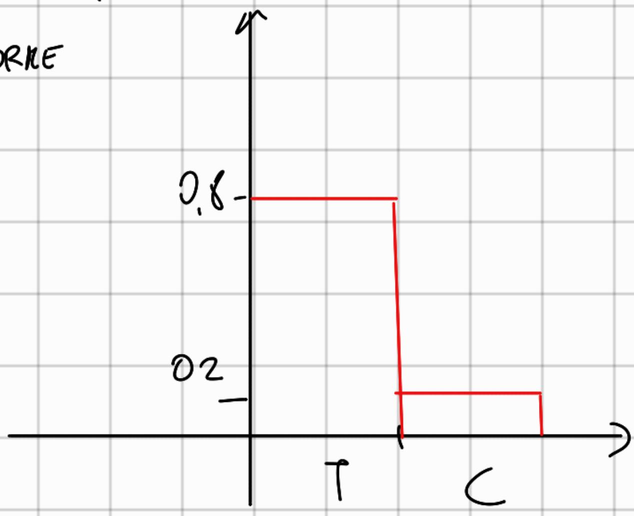
$P_2(\{T\}) = \boxed{0.8}$

$P_2(\{C\}) = 0.2$

(UN'ALTRA DISTRIBUZIONE)

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ UNIFORME





POSSO RAPPRESENTARE LE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ CON QUESTI GRAFICI

• ESEMPIO

SOMMA DI DUE DADI

$$\Omega = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (\cdot), \qquad \qquad) \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ (6,5), (6,6) \}$$

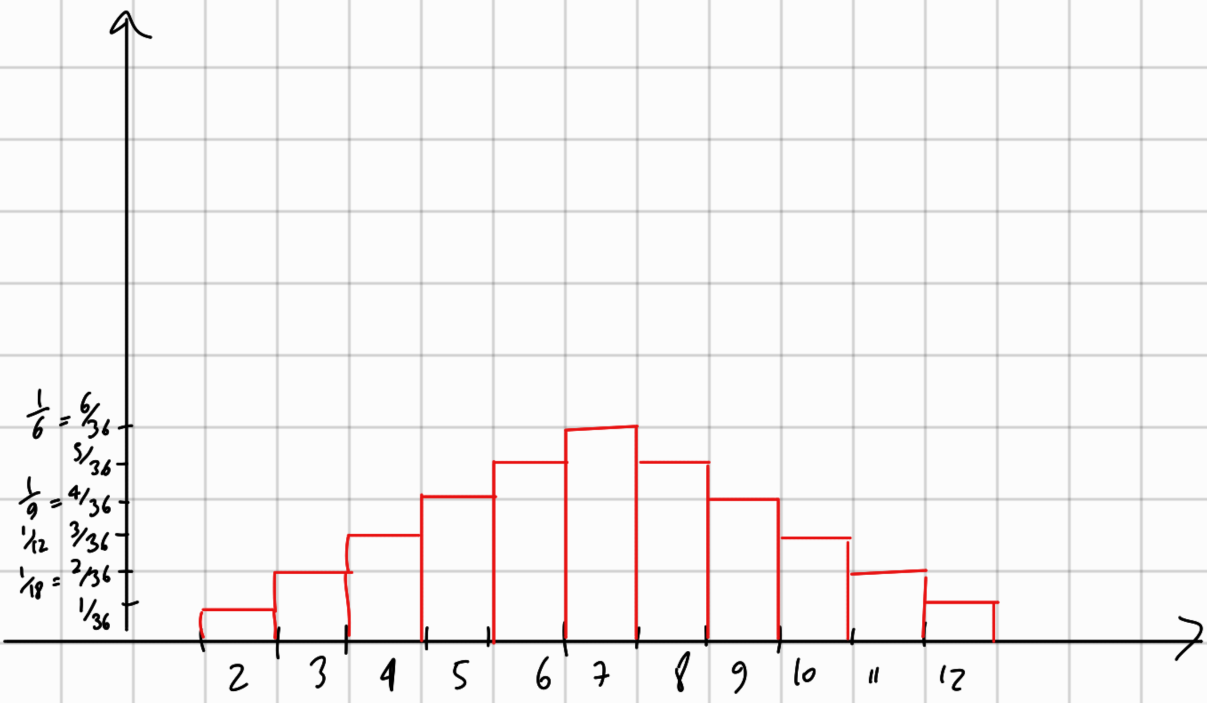
$$\#\Omega = D^{r}_{6,2} = 6^2 = 36$$

QUANTE VOLTE LA SOMMA è 6 ?

$$\bar{\Omega} = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

POSSIBILI RISULTATI DI SOMMA DI DUE DADI

$$P(\text{somma sia } 3) = P\big((2,1), (1,2)\big) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$



DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ BINOMIALE

NON SI INFLUENZANO

DUE EVENTI SI DICONO INDIPENDENTI SE LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO ENTRAMBI È UGUALE AL PRODOTTO DELLE PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO SINGOLARMENTE.

$$P(DADO_1 = 6) = \frac{1}{6}$$

$$P(DADO_2 = 6) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(DADO_1 = 6 \wedge DADO_2 = 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ESEMPIO

È più probabile ottenere $\overbrace{\text{almeno un 6 in 4 lanci singoli}}^{A}$ oppure $\underbrace{\text{ottenere doppio 6 lanciando 24 volte due dadi}}_{B}$?

ALMENO UN

$$P(6) = \frac{1}{6}$$

IL COMPLEMENTARE DI A è $C_\Omega(A)$ = NON OTTENGO MAI 6

$$P(\text{"NON OTTENERE 6" AL PRIMO LANCIO}) = \frac{5}{6}$$

$$P(\text{NON 6 MAI}) = P(\text{NON 6 AL LANCIO 1}) \cdot P(\text{NON 6 AL LANCIO 2}) \cdot P(\text{NON 6 AL LANCIO 3}) \cdot P(\text{NON 6 AL LANCIO 4})$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - 0.482 = 0.518$$

$$P(\text{OTTENERE } (6,6)) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{NON OTTENERE } (6,6)) = \frac{35}{36}$$

$$P(\text{NON OTTENERE } (6,6) \text{ PER 24 VOLTE}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 1 - 0.508 = 0.492$$

- QUALE È LA PROBABILITÀ CHE LANCIANDO DIECI VOLTE UN DADO OTTENGO ALMENO UN NUMERO PARI?

$$1 - \left[P(\text{LANCIO DIECI VOLTE E OTTENGO SEMPRE UN NUMERO DISPARI})\right]$$

$$1 - \left(P(\text{ESCE UN NUMERO DISPARI})\right)^{10} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024}$$

$$= \frac{1024-1}{1024} = \frac{1023}{1024} = 0.9990234375$$

FINORA ABBIAMO PRESO UN FENOMENO SAPENDO LA SUA PROBABILITÀ

NELLA VITA REALE NON ACCADE QUESTO

ESEMPIO: ABBIAMO UN DADO e VOGLIAMO SAPERE SE È TRUCCATO

FACCIAMO UN ESPERIMENTO: LANCIO IL DADO 1000 VOLTE

Se lo lancio 6 volte e ottengo 1,2,3,4,4,5 IL DADO È TRUCCATO?

NON BASTANO

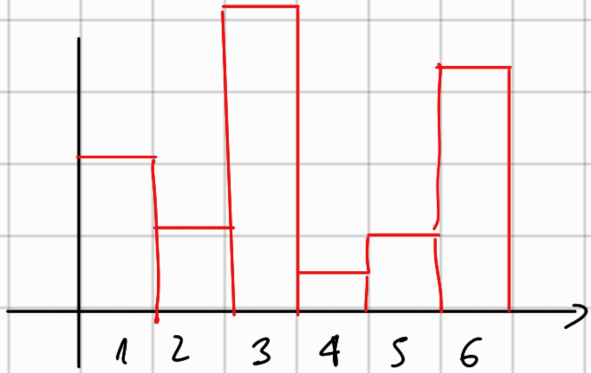
DOPO AVER RIPETUTO UN ESPERIMENTO UN CERTO NUMERO DI VOLTE

- ORGANIZZO I DATI IN MANIERA LEGGIBILE → CON TABELLE / → CON GRAFICI

ESEMPIO LANCIO 1000 VOLTE

TABELLA

1	2	3	4	5	6	POSSIBILI RISULTATI
207	102	405	57	100	336	# DI VOLTE CHE SI SONO VERIFICATI



STATISTICA DESCRITTIVA

- TRAGGO DELLE CONCLUSIONI DAI DATI

CON I NUMERI OTTENUTI RISPONDO ALLA DOMANDA INIZIALE CON UN CERTO LIVELLO DI CONFIDENZA

ESEMPIO

- IL DADO È TRUCCATO AL 99.99 %

OPPURE

- NON LO SO

STATISTICA INFERENZIALE