

## ALTRI TIPI DI MEDIE

## LA MEDIA PESATA

Dato un insieme di variabili e dati i relativi pesi:

$$\begin{array}{l} \rightarrow X_1, X_2, \dots, X_N \quad \text{NUMERICHE} \\ \rightarrow P_1, P_2, \dots, P_N \quad \text{PESI ETR} \end{array}$$

## LA MEDIA PESATA

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i}{\sum_{i=1}^N p_i}$$

ESEMPIO: [CALCOLO MEDIA ESAMI]

$$X_1 = 29, \quad p_1 = 8 \text{ cfu}$$

$$X_2 = 26, \quad p_2 = 2 \text{ cfu}$$

$$X_3 = 18, \quad p_3 = 6 \text{ cfu}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^3 p_i x_i}{\sum_{i=1}^3 p_i} &= \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \\ &= \frac{29 \cdot 8 + 26 \cdot 2 + 18 \cdot 6}{8 + 2 + 6} \\ &= \frac{232 + 52 + 108}{16} = \frac{392}{16} = 24.5 \end{aligned}$$

## LA MEDIA QUADRATICA

 $x_1, \dots, x_N$ 

NUMERICHE

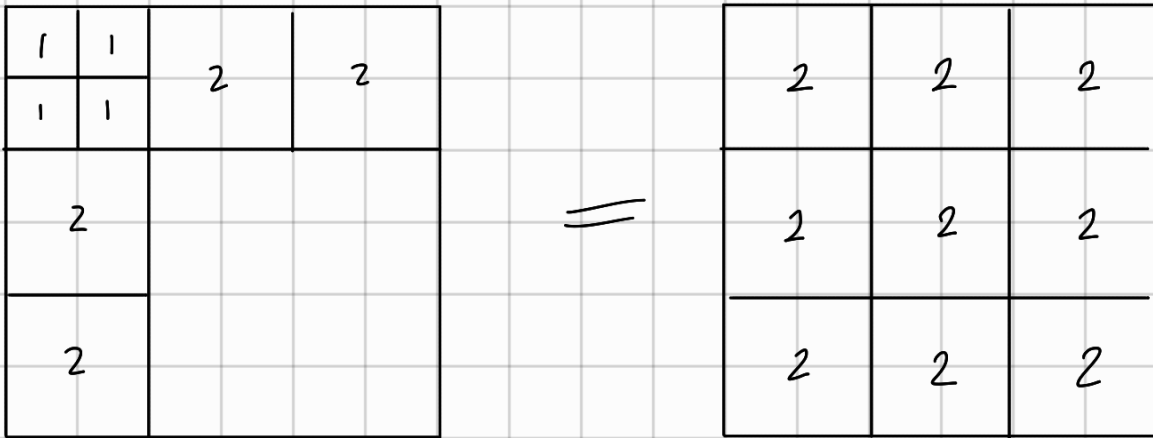
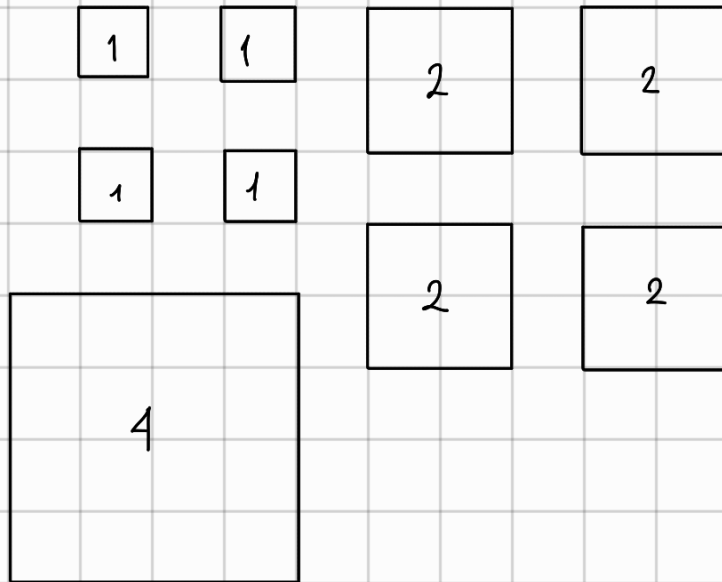
$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}$$

ESEMPIO:

$$X = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4\}$$

$$\bar{X}_9 = \sqrt{\frac{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2}{9}} = \sqrt{\frac{4 + 16 + 16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} =$$

$$= \sqrt{4} = 2$$



Corrisponde al lato del quadrato che dobbiamo scegliere se vogliamo utilizzare 9 quadrati uguali anzichè diversi per ricoprire la stessa area.

# MEDIA ARMONICA

$X_1, \dots, X_N$  NUMERICHE

$$\bar{X}_a = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{X_i}} \quad \leftarrow \text{e' il reciproco delle medie dei reciproci}$$

ESEMPIO Guido l'auto per 42 km

$$V_1 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ per } 21 \text{ km} \rightarrow t_1 = \frac{21 \text{ km}}{30 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{7}{10} \text{ h}$$

$$V_2 = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ per } 21 \text{ km} \rightarrow t_2 = \frac{21 \text{ km}}{70 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{3}{10} \text{ h}$$

Qual e' la velocita' media?  $\rightarrow$  CIOE' A CHE VELOCITA' COSTANTE ANDARE PER PERCORRERE 42 km

$$t_{\text{TOT}} = t_1 + t_2 = \frac{7}{10} \text{ h} + \frac{3}{10} \text{ h} = 1 \text{ h}$$

$$\bar{v} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{42 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Avremmo ottenuto lo stesso risultato calcolando il doppio della media armonica delle velocita'.

$$2\bar{V}_a = 2 \frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{70}} = 2 \frac{1}{\frac{7+3}{210}} = \frac{2}{\frac{1}{210}} = 42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

# INDICI DI DISPERSIONE

ESPERIMENTO 1

7.1

24.1

63.4

86.4

96.8

172.1

192.7

197.6

301.8

358.0

ESPERIMENTO 2

142.2

145.4

147.5

148.2

149.7

150.9

152.4

153.2

154.5

156.0

$$\bar{X} = 150$$

$$\bar{X} = 150$$

La media è la stessa ma i risultati dei due esperimenti sono diversi. Per differenziare queste due situazioni introduciamo gli indici di dispersione.

0) LUNGHEZZA

$$\text{INTERVALLO} = 358 - 7.1 = 350.9$$

$$156 - 142 = 14$$

Non usiamo questo indice perché non considera il resto dei valori.

Per ricavare un indice utile

CALCOLIAMO GLI SCARTI DALLA MEDIA

$$x_i - \bar{x}$$

ESPERIMENTO 1

$$7.1 - 150 = -142.9$$

$$24.1 - 150 = -125.9$$

$$\cdot -86.6$$

$$\cdot -63.6$$

$$\cdot -53.2$$

$$\cdot 22.1$$

$$\cdot 42.7$$

$$\cdot 47.6$$

$$\cdot 151.8$$

$$\cdot 208.0$$

$$\hline 0 \leftarrow \text{SOMMA}$$

ESPERIMENTO 2

$$142.2 - 150 = -7.8$$

$$145.4 - 150 = -4.6$$

$$\cdot -2.5$$

$$\cdot -1.8$$

$$\cdot -0.3$$

$$\cdot 0.9$$

$$\cdot 2.4$$

$$\cdot 3.2$$

$$\cdot 4.5$$

$$\cdot 6.0$$

$$\hline 0 \leftarrow \text{SOMMA}$$

PROPOSIZIONE

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} =$$

$$N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

DALLA DEF. DI  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$N\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i$$

□

FACCIAMO LA MEDIA QUADRATICA DEGLI SCARTI  
(SCARTO QUADRATICO MEDIO)

DEVIATIONE STANDARD

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

VARIANZA

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Var(X)

AUREMMO POTUTO SCEGLIERE IL VALORE ASSOLUTO MA SI È VISTO CHE IL QUADRATO DA' LUOGO A CALCOLI PIÙ SEMPLICI

|                     |        |       |
|---------------------|--------|-------|
| $(x_i - \bar{x})^2$ | 2042.0 | 60.84 |
|                     | 1585.1 | 21.16 |
|                     | 750    | 6.25  |
|                     | :      | :     |
|                     | :      | :     |
|                     | :      | :     |
|                     | :      | :     |
|                     | :      | :     |
|                     | 4326.4 | 36.0  |

|       |
|-------|
| 60.84 |
| 21.16 |
| 6.25  |
| :     |
| :     |
| :     |
| :     |
| :     |
| :     |
| 36.0  |

$$\sigma_1^2 = 1215.3 \quad (u^2)$$

UNITA' DI MISURA AL QUADRATO

$$\sigma_1 = 110.2$$

$$(u)$$

UNITA' DI MISURA SEMPLICE

$$\sigma_2^2 = 16.464 \quad u^2$$

$$\sigma = 4.057 \quad u$$

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE (E' ADIMENSIONALE)

$$CV(x) = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$CV_1 = \frac{110.2}{150} = 0.73$$

ADIMENSIONALE

$$CV_2 = \frac{4.057}{150} \approx 0.03$$

# DENSITA' DI PROBABILITA' CONTINUE

DEFINIZIONE

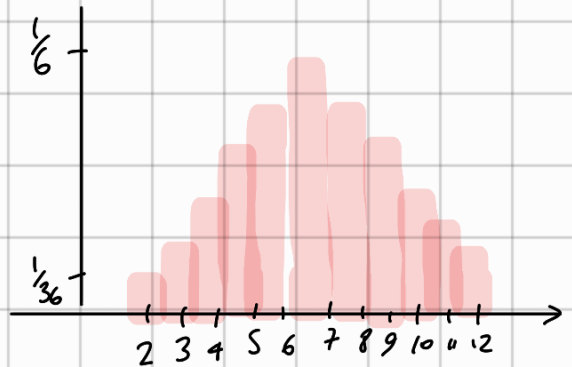
(V.A.)

$X$  si dice **VARIABILE ALEATORIA** se è una misura che possiamo ripetere più volte e il suo valore cambia di volta in volta

ESEMPIO:  $X =$  Somme di due dadi

$$\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{36}$$



$$P(X \leq 3) = P(\{X=2\} \cup \{X=3\})$$

$$= P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

PER ESTENDERE LA DEFINIZIONE A  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  ← INSIEME CONTINUO

$X \in [a, b]$  oppure  $X \in (a, b)$

$X \in (-\infty, +\infty)$

Se  $\Omega$  è un INTERVALLO di  $\mathbb{R}$

Si dice che  $X$  è V.A. CONTINUA, e' DESCRITTA COI':

DEFINIAMO UNA FUNZIONE **DENSITA' DI PROBABILITA'**  $f$  t.c.

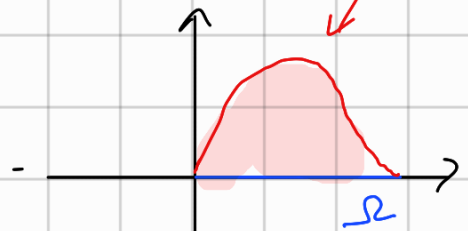
$$\int_{\Omega} f(x) dx = 1$$

(SIGNIFICA CHE GLI ESTREMI DELL'INTEGRALE SONO QUELLI DI  $\Omega$  SIANO ESSI FINITI O INFINITI.)

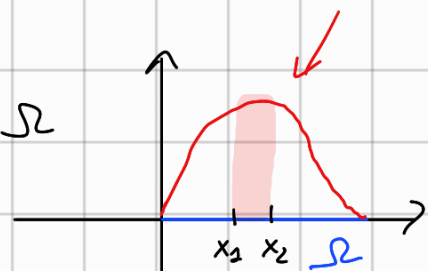
$$\left( \sum p_i = 1 \right)$$

AREA=1

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$



$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega$$

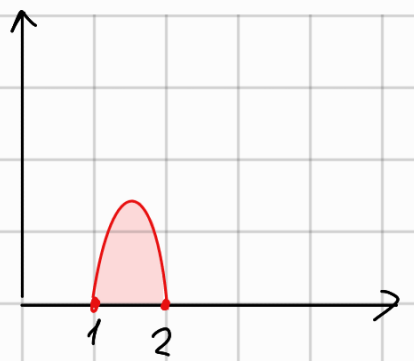


ESEMPIO:  $\Omega = [1, 2]$

$$f(x) = 6(-x^2 + 3x - 2)$$

$$\bullet \int_1^2 f(x) dx = 1$$

$$\bullet f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$



Qual è la probabilità che la misura cada tra  $1.25$  e  $1.75$ ?  
 $\frac{5}{4}$  e  $\frac{7}{4}$

$$P(1.25 < X < 1.75) = P\left(\frac{5}{4} < X < \frac{7}{4}\right) =$$

$$= \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} 6(-x^2 + 3x - 2) dx =$$

$$= 6 \left[ -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} =$$

$$= 6 \left[ -\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^3}{3} + 3\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2}{2} - 2\frac{7}{4} + \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{2} + 2\left(\frac{5}{4}\right) \right] =$$

$$= \dots = 0.69$$



LA DENSITA' DI PROBABILITA' PIU' IMPORTANTE E'  
LA NORMALE (O GAUSSIANA)

Se  $X$  segue una distribuzione normale di media  $\mu \in \mathbb{R}$   
e VARIANZA  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$

SCRIVIAMO  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Omega = \mathbb{R}$$

LA PIU' FANOSA E'  $Z \sim N(0, 1)$

$$f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

PER ESERCIZIO STUDIO DI FUNZIONI

DELLA DISTRIBUZIONE  $Z \sim N(0, 1)$  UTILIZZIAMO LE SEGUENTI INFORMAZIONI:

$$P(-3 < Z < 3) = 99.73$$

$$P(-2 < Z < 2) = 95.45$$

TEOREMA [DEL LIMITE CENTRALE]

IMPORTANTE!

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  V.A. • INDIPENDENTI

• LIMITATE

• CON VARIANZE CHE NON TENDONO  
A ZERO.

allora la V.A.

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W \quad \text{e' UNA V.A. NORMALE}$$

se vale anche che  $X_i$  hanno tutte la stessa media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$

$$\Rightarrow W_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$