Lezione 27

06/12/24

ALTRI TIPI DI MEDIE

LA MEDIA PESATA

Dato un insieme di variabili $\rightarrow$ $x_1, x_2, \dots x_N$ NUMERICHE

e dati i relativi pesi $\rightarrow$ $p_1, p_2, \dots p_N$ PESI $\in \mathbb{R}$

LA MEDIA PESATA

$$\overline{x_p} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i}$$

ESEMPIO: [CALCOLO MEDIA ESAMI]

$x_1 = 29$, $p_1 = 8$ cfu

$x_2 = 26$ $p_2 = 2$ cfu

$x_3 = 18$ $p_3 = 6$ cfu

$$\frac{\sum_{i=1}^{3} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} p_i} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3}{p_1 + p_2 + p_3} =$$

$$= \frac{29 \cdot 8 + 26 \cdot 2 + 18 \cdot 6}{8 + 2 + 6}$$

$$= \frac{232 + 52 + 108}{16} = \frac{392}{16} = 24.5$$

$\boxed{\text{LA MEDIA QUADRATICA}}$ $x_1, \dots x_N$ NUMERICHE

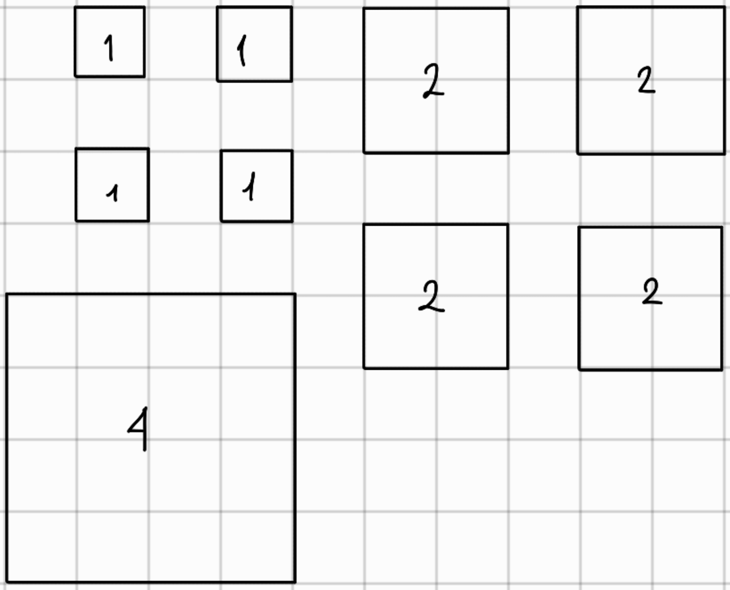
$$\overline{x_q} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

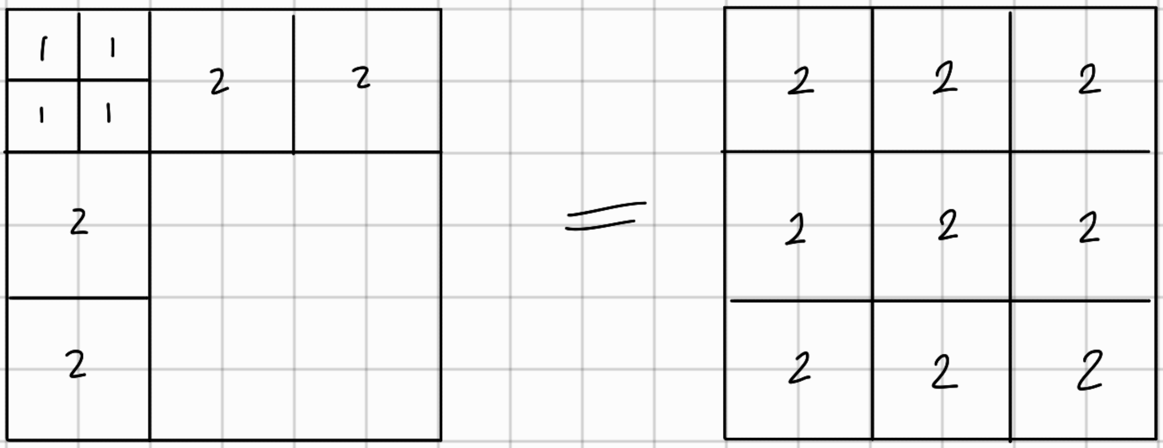
ESEMPIO:

$$X = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4\}$$

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\underbrace{1^2+1^2+1^2+1^2}+\underbrace{2^2+2^2+2^2+2^2}+\underbrace{4^2}}{9}} = \sqrt{\frac{4+16+16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} =$$

$$= \sqrt{4} = 2$$





Corrisponde al lato del quadrato che dobbiamo scegliere se vogliamo utilizzare 9 quadrati uguali anziché diversi per ricoprire la stessa area!

MEDIA ARMONICA $\quad X_1, \ldots X_N$ NUMERICHE

$$\bar{X}_a = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$$ ← è il reciproco della media dei reciproci

ESEMPIO $\quad$ Guido l'auto per 42 km

$V_1 = 30 \frac{km}{h}$ per 21 km $\rightarrow t_1 = \frac{21\ km}{30\ \frac{km}{h}} = \frac{7}{10}\ h$

$V_2 = 70 \frac{km}{h}$ per 21 km $\rightarrow t_2 = \frac{21\ km}{30\ \frac{km}{h}} = \frac{3}{10}\ h$

Qual è la velocità media? → CIOÈ A CHE VELOCITÀ COSTANTE ANDARE PER PERCORRERE 21 km

$$t_{TOT} = t_1 + t_2 = \frac{7}{10}h + \frac{3}{10}h = 1\ h$$

$$\bar{v} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{42\ km}{1\ h} = 42\ \frac{km}{h}$$

Avremmo ottenuto lo stesso risultato calcolando il doppio della media armonica delle velocità:

$$2V_a = 2\frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{70}} = 2\frac{1}{\frac{7+3}{210}} = \frac{2}{\frac{1}{21}} = 42\ \frac{km}{h}$$

INDICI DI DISPERSIONE

ESPERIMENTO 1	ESPERIMENTO 2
$\boxed{7.1}$	$\boxed{142.2}$
24.1	145.4
63.4	147.5
86.4	148.2
96.8	149.7
172.1	150.9
192.7	152.4
197.6	153.2
301.8	154.5
$\boxed{358.0}$	$\boxed{156.0}$

$\bar{X} = 150$ $\bar{x} = 150$

La media è la stesse ma i risultati dei due esperimenti sono diversi.
per differenziare queste due situazioni introduciamo gli indici di dispersione.

0) LUNGHEZZA INTERVALLO $= 358 - 7.1 = 350.9$ $156 - 142 = 14$

Non usiamo questo indice perché non considera il resto dei valori

Per ricavare un indice utile

CALCOLIAMO GLI SCARTI DALLA MEDIA $x_i - \bar{x}$

ESPERIMENTO 1		ESPERIMENTO 2	
7.1 - 150 =	-142.9	142.2 - 150 =	-7.8
24.1 - 150 =	-125.9	145.4 - 150 =	-4.6
⋮	-86.6	⋮	-2.5
⋮	-63.6	⋮	-1.8
⋮	-53.2	⋮	-0.3
⋮	22.1	⋮	0.9
⋮	42.7	⋮	2.4
⋮	47.6	⋮	3.2
⋮	151.8	⋮	4.5
⋮	208.0	⋮	6.0
	0 ← SOMMA		0 ← SOMMA

PROPOSIZIONE

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = 0}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} \bar{x} =$$

$$N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

DALLA DEF. DI $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$N\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$\square$

AVREMMO POTUTO SCEGLIERE IL VALORE ASSOLUTO MA SI È VISTO CHE IL QUADRATO DÀ LUOGO A CALCOLI PIÙ SEMPLICI

FACCIAMO LA MEDIA QUADRATICA DEGLI SCARTI

(SCARTO QUADRATICO MEDIO)

$\boxed{\text{DEVIAZIONE STANDARD}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

$\boxed{\text{VARIANZA}}$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = Var(X)$$

$(x_i - \bar{x})^2$

2042.0	60.84
1585.1	21.16
750	6.25
⋮	⋮
4326.4	36.0

$\sigma_1^2 = 1215.3 \quad (u^2)$ ← UNITA' DI MISURA AL QUADRATO

$\downarrow$

$\boxed{\sigma_1 = 110.2} \quad (u)$ ← UNITA' DI MISURA SEMPLICE

$\sigma_2^2 = 16.464 \quad u^2$

$\boxed{\sigma = 4.057} \quad u$

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE (E' ADIMENSIONALE)

$$CV(x) = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$CV_1 = \frac{110.2}{150} = 0.73$$

← ADIMENSIONALE

$$CV_2 = \frac{4.057}{150} \simeq 0.03$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONTINUE

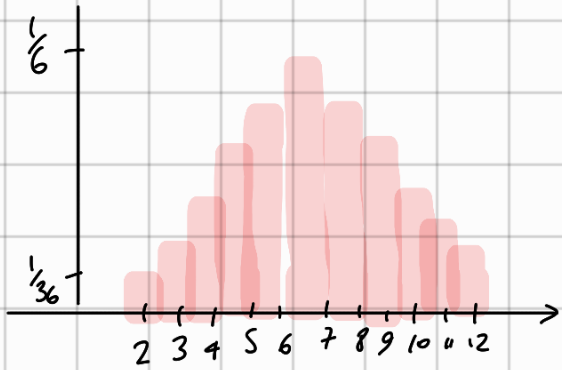
(V.A.)

DEFINIZIONE

X si dice $\boxed{\text{VARIABILE ALEATORIA}}$ se è una misura che possiamo ripetere più volte e il suo valore cambia di volta in volta

ESEMPIO: X = somme di due dadi

$\Omega = \{2, 3, 4, \dots 12\}$



$$P(\underbrace{X=2}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X \leq 3) = P(\{X=2\} \cup \{X=3\})$$

$$= P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

PER ESTENDERE LA DEFINIZIONE A $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ← INSIEME CONTINUO

$X \in [a,b]$ oppure $X \in (a,b)$

$X \in (-\infty, +\infty)$

Se Ω è UN INTERVALLO di $\mathbb{R}$

Si dice che X è V.A. CONTINUA, è DESCRITTA così:

DEFINIAMO UNA FUNZIONE $\boxed{\text{DENSITÀ DI PROBABILITÀ}}$ f t.c.

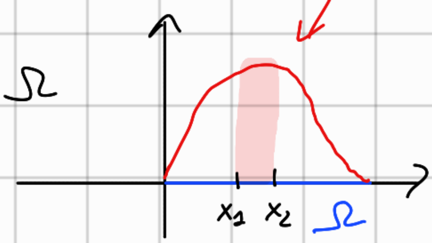
- $\int_\Omega f(x)\,dx = 1$ $\quad (\sum p_i = 1)$

  (SIGNIFICA CHE GLI ESTREMI DELL'INTEGRALE SONO QUELLI DI Ω SIANO ESSI FINITI O INFINITI.)

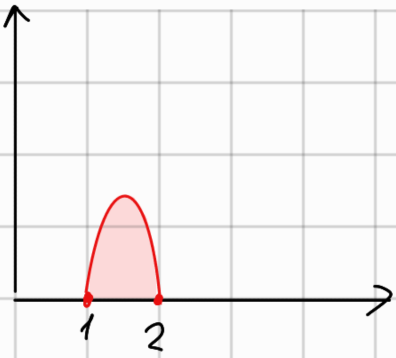
AREA=1

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$

- $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega$



ESEMPIO: $\Omega = [1,2]$



$$f(x) = 6(-x^2+3x-2)$$

- $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 1$

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$

Qual è la probabilità che la misura cada tra 1.25 e 1.75?
$\qquad\qquad 5/4 \qquad 7/4$

$$P(1.25 < X < 1.75) = P\left(\frac{5}{4} < X < \frac{7}{4}\right) =$$

$$= \int_{5/4}^{7/4} 6(-x^2+3x-2)\,dx =$$

$$= 6\left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{5/4}^{7/4} =$$

$$= 6\left[-\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^3}{3} + 3\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2}{2} - 2\frac{7}{4} + \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{2} + 2\left(\frac{5}{4}\right)\right] =$$

$$= \dots = 0.69$$

LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ PIÙ IMPORTANTE È LA NORMALE (O GAUSSIANA)

Se X segue una distribuzione normale di media $\mu \in \mathbb{R}$ e VARIANZA $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$

SCRIVIAMO $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Omega = \mathbb{R}$

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

LA PIÙ FAMOSA è $Z \sim N(0,1)$

$$f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

PER ESERCIZIO STUDIO DI FUNZIONE

DELLA DISTRIBUZIONE $Z \sim N(0,1)$ UTILIZZIAMO LE SEGUENTI INFORMAZIONI:

$P(-3 < Z < 3) = 99.73$

$P(-2 < Z < 2) = 95.45$

TEOREMA [DEL LIMITE CENTRALE]

IMPORTANTE!

Siano $X_1, X_2 \dots X_n$ V.A.
- INDIPENDENTI
- LIMITATE
- CON VARIANZE CHE NON TENDONO A ZERO.

allora la V.A.

$$W_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{} W$$

è UNA V.A. NORMALE

se vale anche che X_i hanno tutte la stessa media μ e varianza σ^2

$$\Rightarrow W_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

NO DIM