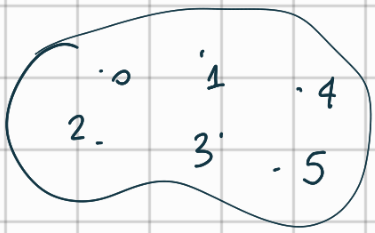
Lezione 2

23/10/23

QUANTIFICATORI $\forall$ $\exists$

PER OGNI ESISTE



$\underbrace{\forall x \in A \quad x \leq 5}$ VERA

p_1 $\forall x \in A \quad x \leq 4$ FALSA

$\sim p_1$ $\exists x \in A : x > 4$

NON $\leq$

D insieme $D \subseteq \mathbb{N}$ Nessun elemento di D e' pari

$=$ $\leftarrow$ p_1: $\forall x \in D$ x e' DISPARI (NON PARI)

$\sim p_1$: $\exists x \in D$ x PARI

$\downarrow$

V

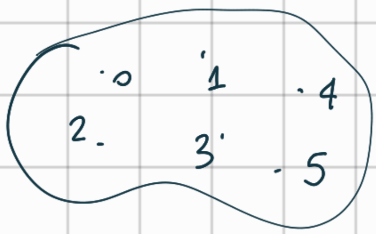
$D = \{1, 2, 5, 7, 9\}$

$\exists 2 \in D : 2$ PARI

Esiste un elemento di A PARI

$\exists x \in A$ PARI VERA

$\forall x \in A$ x DISPARI FALSA



Definizione I NUMERI NATURALI SONO $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

DEFINIZIONE

Sia $n \in \mathbb{N}$ $\quad n$ è PARI $\iff \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \qquad \mathbb{P} = \{\text{pari}\}$

$\qquad\qquad n$ è DISPARI $\iff \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1 \qquad \mathbb{D} = \{\text{dispari}\}$

7 è DISPARI $\quad 7 = 2 \cdot 3 + 1$ ✓

28 è PARI $\quad 28 = 2 \cdot 14$ ✓

PROPOSIZIONE 1

$$\mathbb{P} = \mathcal{C}_{\mathbb{N}}(\mathbb{D}) \qquad \left(\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \mathbb{D} \right)$$

DIMOSTRAZIONE CHE 28 NON È DISPARI

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } x \text{ è PARI} \Rightarrow x \text{ NON è DISPARI} \\ 28 \text{ è PARI} \end{array} \right. \rightarrow \quad 28 \text{ NON È DISPARI}$$

$\square$

PROPOSIZIONE

La somma di un numero pari e di un numero dispari è dispari

m PARI $\Rightarrow m = 2k_1$

n DISPARI $\Rightarrow n = 2k_2$

$$m + n = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{N} \text{ sì}}}{k_1 + k_2}) + 1 \qquad \text{È DISPARI} \ \square$$

PROPOSIZIONE

$$\sim(p_1 \vee p_2) = (\sim p_1) \wedge (\sim p_2)$$

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$	$\sim(p_1 \vee p_2)$	$\sim p_1$	$\sim p_2$	$(\sim p_1) \wedge (\sim p_2)$
V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	V

Non è vero che $\left(\underbrace{n \text{ è dispari}}_{p_1} \underset{\vee}{\text{oppure}} \underbrace{n \text{ è un multiplo di } 4}_{p_2} \right)$

$\sim$

p_1 F, p_2 F → F

$\sim$ VERO

$\underbrace{n \text{ è PARI}}_{V}$ $\underset{\wedge}{\text{e}}$ n $\underbrace{\text{NON è MULTIPLO}}_{V}$ DI 4 → VERO

$n = 6$ è VERA

PROPOSIZIONE

$$\sim(p_1 \wedge p_2) = (\sim p_1) \vee (\sim p_2)$$

DEFINIZIONE

$n, m \in \mathbb{N}$ $\quad$ n è DIVISORE di m $\iff \exists k \in \mathbb{N} : nk = m$

$n \mid m$

m è MULTIPLO di n

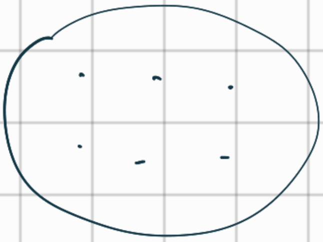
$\overset{n}{4}$ è DIVISORE di $\overset{m}{8}$ è VERO

$\exists \underset{k}{2} \in \mathbb{N} : 4 \cdot 2 = 8$ ✓

CALCOLO COMBINATORIO CAP 6 MONTALDO

A è un insieme $\quad$ #A CARDINALITÀ di A
è il numero degli elementi di A

$\#A = 6$



$A = \{a, b, c\}$ $\qquad$ abc $\quad$ bac $\quad$ cab
acb $\quad$ bca $\quad$ cba

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

DEFINIZIONE
Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad \boxed{n! := n(n-1) \dots (1)}$

$$0! = 1$$

Se ho 10 persone e 10 sedie

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 1 = 3628800$$

DEFINIZIONE
Una permutazione è una SEQUENZA <u>ORDINATA</u> di elementi di A in cui ogni elemento compare una e una sola volta

DEFINIZIONE

$A = \{a, b, c\}$

ab ba ca

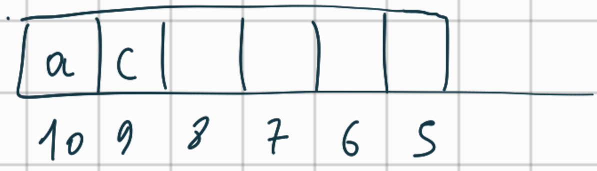
ac bc cb

Una DISPOSIZIONE di k elementi in un insieme di n possibilità

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}}$$

ESEMPIO

10 persone e 6 sedie



$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

$(n-k+1) = 10-6+1 = 5$

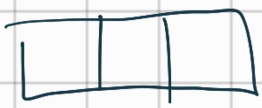
COMBINAZIONI

Conta il numero di sottoinsiemi di k elementi scelti tra un insieme di n elementi

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

10 persone

3 sedie



$$\frac{D_{10,3}}{P_3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$ n su k

COEFFICIENTE BINOMIALE

$A = \{a, b, c\}$

ab
bc
ac

$$C_{3,2} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$$

n numero degli elementi
k numero di posti

	PERMUTAZIONI	DISPOSIZIONI	COMBINAZIONI
QUANTI ELEMENTI ?	n	k	k
CONTA L'ORDINE	SI	SI	NO
	$P_n = n!$	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$$D_{50,20} = \frac{50!}{(50-20)!} = \frac{50!}{30!} = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots \quad 31$$

$$= 3.4398 \cdot 10^{33}$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

$$D^r_{m,k} = m^k$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

$m=2$ elementi (es. fiori: rose, garofani)
$k=4$ posti

rrrr
rrrg
rrgg
rggg
gggg

5 POSSIBILI MAZZI

$$C^r_{m,k} = \binom{m+k-1}{k}$$

$$C^r_{2,4} = \binom{4+2-1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

ESEMPIO

3 FIORI
7 POSTI

$$C_{3,7} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{2!}} = 36$$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Sia A gruppo di n elementi al cui interno c'è un elemento ripetuto k_1 volte un altro k_2 volte .... k_r volte. Il numero di permutazioni di questo gruppo è

$$P_n^{k_1 k_2 k_3 \ldots k_r} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}$$

ESEMPIO

casa

casa

COINCIDONO

ESEMPIO

statistica

s t a i c

2 3 2 2 1

$$P_{10}^{2223} = \frac{10!}{2!2!2!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \cancel{3!}} = 75600$$

RIEPILOGO

Sia n numero di elementi, k la lunghezza della sequenza

	PERMUTAZIONI	DISPOSIZIONI	COMBINAZIONI
QUANTI ELEMENTI	n	k	k
CONTA L'ORDINE?	SÌ	SÌ	NO
SEMPLICI	$P_n = n!$	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
RIPETIZIONE ELEMENTI	$P_n^{k_1,k_2 \dots k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$	$D^r_{n,k} = n^k$	$C^r_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

- ESERCIZIO: Calcolare il numero di targhe ITALIANE possono esistere

$\boxed{\text{AB 123 CD}}$

- ESERCIZIO

Hai 1 pezzo di ogni moneta e banconote esistente, quante cifre diverse puoi pagare usando al massimo 3 pezzi?