Lezione 8 10/11/23

POLINOMI $P: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ $x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Se $a_n \neq 0$ P è DI GRADO n

ESEMPIO

POLINOMIO DI GRADO 2 $\quad x^2 + 2x + 1$

$a_2 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_0 = 1$

Definizione
$x \in \mathbb{R}$ è RADICE (o SOLUZIONE) di P se $P(x) = 0$

ESEMPIO $\quad P(x) = 2x - 3$

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$ è LA RADICE di P

N° DI RADICI $\leq$ GRADO del POLINOMIO

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è una radice di $P(x)$ allora si può scrivere

$$P(x) = (x - x_0)^k \, Q(x)$$

$k \in \mathbb{N}$
$Q(x_0) \neq 0$
$\Rightarrow k$ SI DICE MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI x_0

$x^2 - x - 3$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$$x_{12} = \frac{1 \pm 4}{2} \quad x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = +\frac{5}{2}$$

$$x^2 - x - 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$x^2 - 2x + 1$

$x_1 = x_2 = 1$

$(x-1)^2 \, 1 \rightarrow Q(x)$

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x^2 - 2x + 1)(x - 5) = \boxed{(x-1)^2(x-5)}$$

$$P(x) = x^3 = (x - 0)^3 \cdot 1$$

$x_0 = 0$ è SOLUZIONE TRIPLA

La molteplicità algebrica della soluzione è 3

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)^1 (x+2)^2$$

$\Delta = 0$

$$P(1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$\Downarrow$

$x_0 = 1$ con molt. 1

$x_0 = -2$ con molt. 2

$$P(x) = x^2 + 1$$

$\Delta = -4 < 0$

$\underbrace{\text{NON CI SONO RADICI (REALI) DI QUESTO POLINOMIO}}$

$\Downarrow$

$P(x) = \quad Q(x)$

Diremo che $P(x)$ e' $\boxed{\text{IRRIDUCIBILE}}$

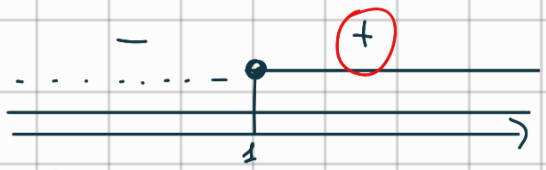
$f(x)g(x) \geq 0$

$$x^3 + 3x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)^2 \geq 0$$

$x - 1 \geq 0 \;\downarrow\; x \geq 1$

$(x+2)^2 \geq 0 \;\downarrow\; \mathbb{R}$



$$S = [+1, +\infty)$$

$$x^3 + 3x^2 - 4$$

VOGLIAMO VERIFICARE SE $x_0 = 1$ e' UNA SOLUZIONE

	a_3	a_2	a_1	
	1	3	0	−4
		+	+	+
1		$1 \cdot 1$	$1 \cdot 4$	$1 \cdot 4$
	1	4	4	0

SE QUI TROVIAMO 0 $\Rightarrow$ 1 e' SOLUZIONE DEL POLINOMIO

ALLORA

$$x^3 + 3x^2 + 4 = (x-1)(x^2+4x+4)$$

$$\frac{3x^3-8x^2+3x+2}{x^2} \le 0$$

SCOMPONGO $3x^3-8x^2+3x+2$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -8 & 3 & 2 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

I CONTROLLO $x=1$? $3-8+3+2=0$ SÌ

II CONTROLLO $x=-1$ $-3-8-3+2=-12\neq 0$ NO

DIVISORI DI $a_0=2$

III CONTROLLO 1 2

1	± 1	± 2
3	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{2}{3}$

DIVISORI DI $a_n=3$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -8 & 3 & 2 \\ & & + & & \\ 2 & & \overset{3\cdot 2}{6} & \overset{-2\cdot 3}{-4} & -2 \\ \hline & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(3x^2-2x-1)$$

PROVO -2

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -8 & 3 & 2 \\ -2 & & -6 & 28 & -62 \\ \hline & 3 & -14 & 31 & -60 \neq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow -2$ NON È SOLUZIONE

METODO IN GENERALE (RUFFINI)

Dato $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ POLINOMIO

(RADICE)
x_0 è SOLUZIONE di P $\iff$ $a_0 + b_0 x_0 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
x_0 & & b_{n-1}x_0 & & b_2 x_0 & b_1 x_0 & b_0 x_0 \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + b_{n-1}x_0 & & & & a_0 + b_0 x_0 \\
 & \parallel & \parallel & & & & \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & & b_1 & b_0 &
\end{array}
$$

CHIAMO

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1}x_0 \\
&\vdots \\
b_k &= a_{k+1} + b_{k+1}x_0
\end{aligned}
$$

e il polinomio P si può SCRIVERE come

$$P(x) = (x - x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots b_0)$$

TORNO ALL' ESERCIZIO

$$\frac{3x^3-8x^2+3x+2}{x^2} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)(3x^2-2x-1)}{x^2} \leq 0$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & -2 & -1 \\ 1 & & 3 & 1 \\ \hline & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

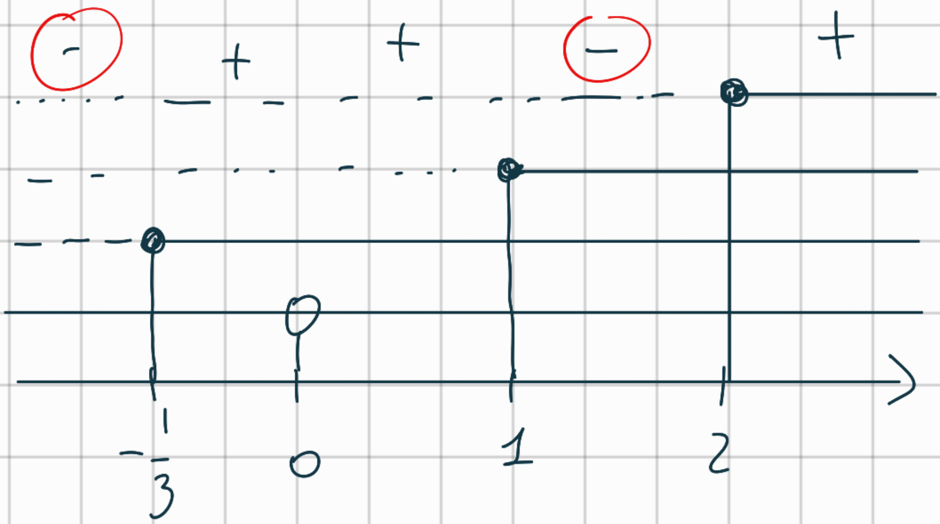
$$\frac{(x-2)(x-1)(3x+1)}{x^2} \leq 0$$

$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$3x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

$x^2 > 0 \rightarrow x \neq 0$



$$S = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, 2]$$

EQUAZIONI FRATTE

$$\frac{9x^3+15x^2-8x-4}{x+7}=0 \iff 9x^3+15x^2-8x-4=0$$

RICORDANDOCI CHE NON POSSIAMO PRENDERE $\boxed{x=-7}$

I CONTROLLO $9+15-8-4=12\neq 0 \to x_0\neq 1$

II CONTROLLO $-9+15+8-4=10\neq 0$ $\quad x_0\neq -1$

	1	2	4
1	± 1 NO	± 2	± 4
3	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{2}{3}$	$\pm\frac{4}{3}$
9	$\pm\frac{1}{9}$	$\pm\frac{2}{9}$	$\pm\frac{4}{9}$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 9 & 15 & -8 & -4 \\
2 & & 18 & 66 & 116 \\
\hline
 & 9 & 33 & 58 & \neq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 9 & 15 & -8 & -4 \\
-2 & & -18 & 6 & +4 \\
\hline
 & 9 & -3 & -2 & 0
\end{array}$$

$$(x+2)(9x^2-3x-2)=0 \nearrow x_1=-2\neq -7 \quad \text{ok}$$

$$\Delta = 9+4\cdot 18 = 9+72=81$$

$$x_{2,3}=\frac{3\pm 9}{18}$$

$$x_2=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}\neq -7 \quad \text{ok}$$

$$x_3=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\neq -7 \quad \text{ok}$$

$$S=\left\{-2,-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$$

SE CI SONO SOLO POTENZE PARI

$$x^4+2x^2-15=0 \qquad t=x^2$$

$$t^2+2t-15=0$$

$$\Delta=4+4\cdot15=64$$

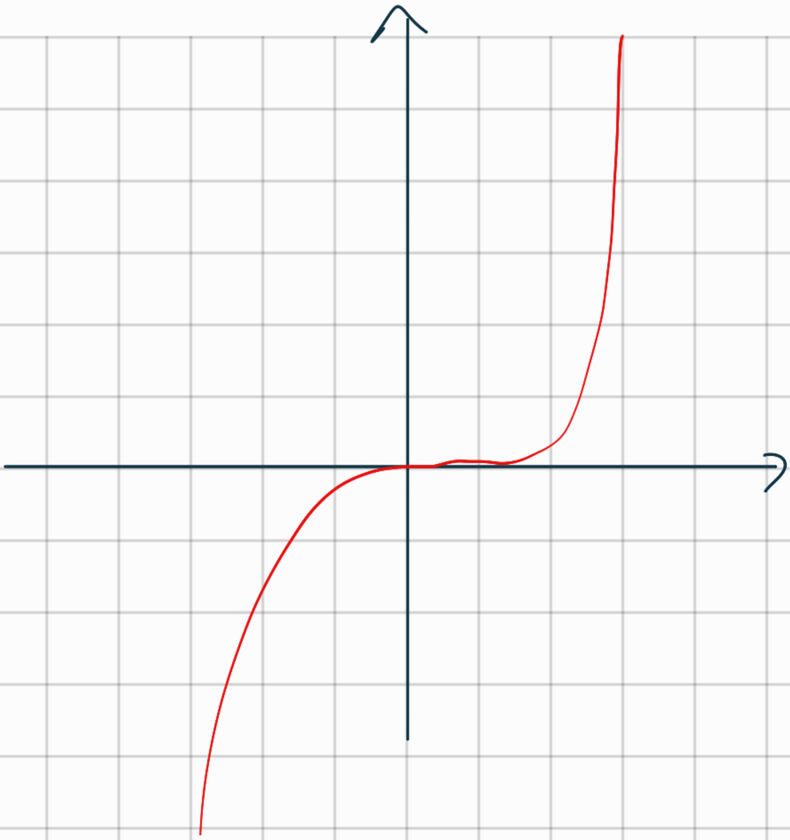
$$t_{1,2}=\frac{-2\pm8}{2} \quad t_1=-5 \quad t_2=3$$

$$(t+5)(t-3)=0$$

$$(x^2+5)(x^2-3)=0$$

$f(x) = x^3$

E' INIETTIVA e SURIETTIVA



$\sqrt[3]{\ } : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$

$\sqrt[3]{x}$ e' QUEL NUMERO y
SE CALCOLI $y^3 = x$

IN GENERALE

$$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) & \text{se } n \text{ e' PARI} \\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{se } n \text{ e' DISPARI} \end{cases}$$

EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{f(x) = [g(x)]^n} = g^n(x)$$

NOTAZIONE

SE N e' DISPARI BASTA COSI'

SE n e' PARI DEVO VERIFICARE CHE LE SOLUZIONI DI QUESTA EQUAZIONE ABBIANO SENSO

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \leftarrow$$

ESEMPIO

$$\sqrt{16-x} = x-4$$

n è PARI

$$\begin{cases} 16-x = (x-4)^2 \\ 16-x \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \quad 16-x = x^2-8x+16$$

$$x^2-7x = 0$$

$$x(x-7) = 0$$

$x_1 = 0 \rightarrow$ NO

$x_2 = 7 \rightarrow$ SÌ

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 16 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$x \in [4, 16]$

VERIFICA

$$\sqrt{16-0} = 0-4$$

$4 = -4$ FALSO

$$\sqrt{16-7} = 7-4$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$3 = 3$ VERO