Lezione 9 13/11/23

$f(x) = x^n$ FUNZIONE POTENZA

$$\boxed{x^0 := 1}$$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ STESSA BASE

2. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ STESSO ESPONENTE

3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ POTENZA DI POTENZA

FINORA $n, m \in \mathbb{N}$

ESTENSIONE AI NUMERI INTERI $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$n \in \mathbb{N}$

DEFINIZIONE $\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$

$$2^{-3} = (2^{-1})^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$

$$2^0 = 2^{3-3} = 2^3 \cdot 2^{-3} = \frac{2^3}{2^3} = 1$$

ESTENSIONE AI NUMERI RAZIONALI

$n \in \mathbb{Z} \quad \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \quad MCD(n, m) = 1$

$m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n}}$$

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 \overset{\text{PROPRIETÀ}}{=} 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5^1 = 5$$

Allora $5^{\frac{1}{2}}$ è quel numero che se ne fai il quadrato ti dà 5

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$8 = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$$

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{27}(2+1)^2 = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{3^3}(3)^4 = \frac{2}{3^3}3^4 = 2\cdot 3^{4-3} = 2\cdot 3 = 6$$

$$x^{\frac{3}{2}} + 2 \geq 0$$

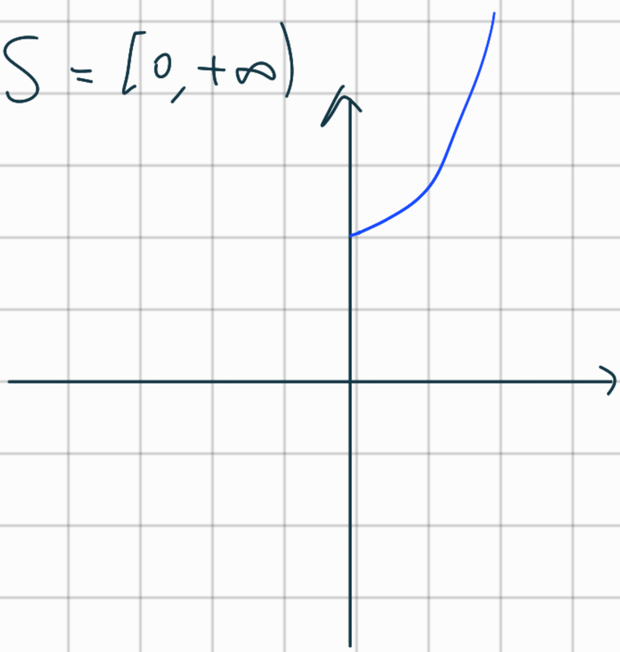
$$\sqrt{x^3} + 2 \geq 0 \rightarrow \text{SEMPRE}$$

$$\text{C.E. } x^3 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x \geq 0$$

$S = [0, +\infty)$

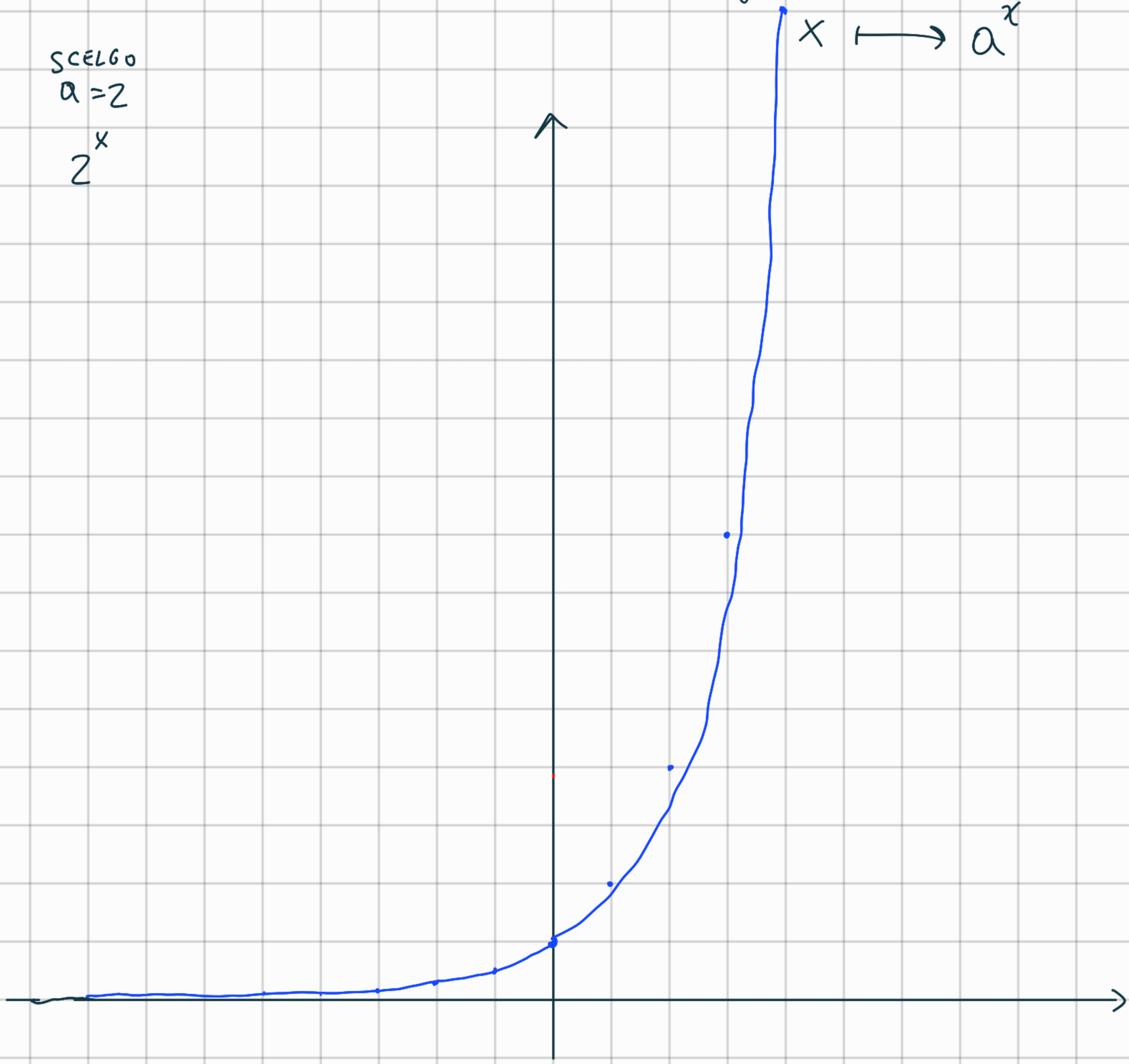


FUNZIONE ESPONENZIALE

Sia $a > 0$ $\left(a \in (0, +\infty) \right)$

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
$x \longmapsto a^x$

SCELGO
$a = 2$
2^x



$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

$2^{-2} = \frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

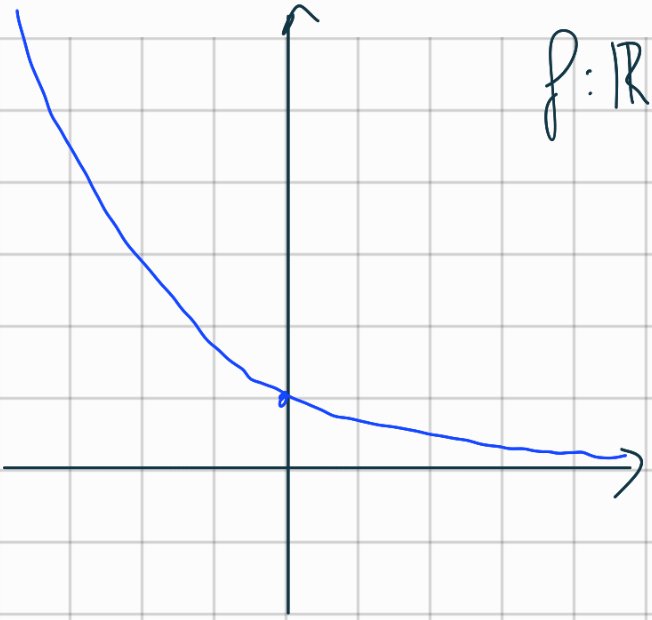
$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

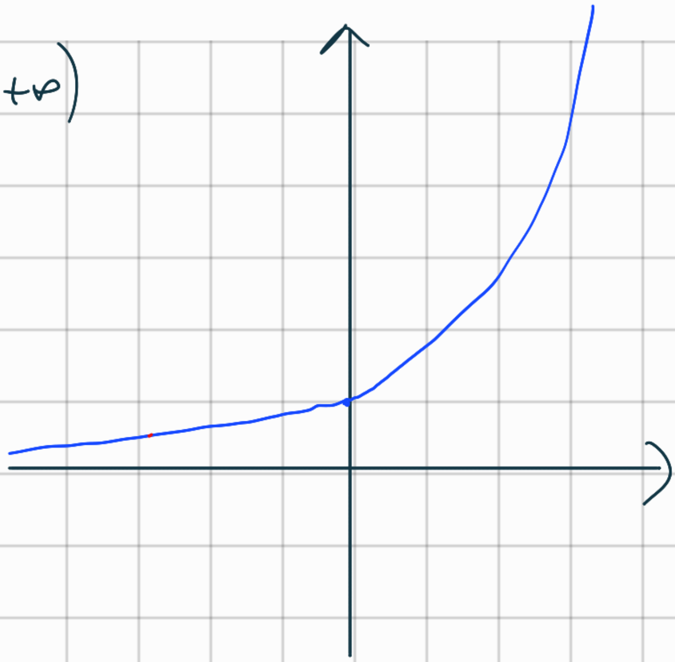
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1^{-1}}{2^{-1}} = \frac{2}{1} = 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

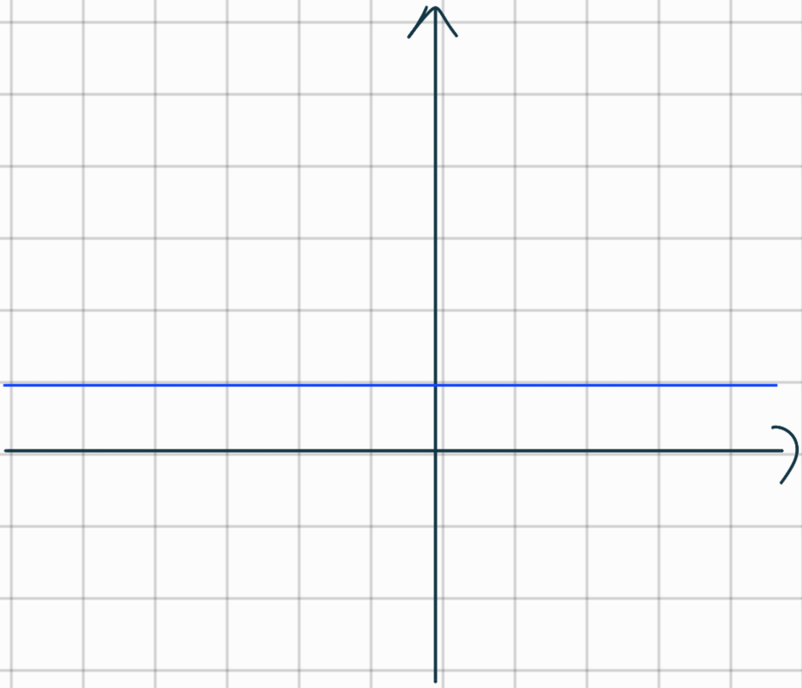
$f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$



$0 < a < 1$



$a > 1$



SE $a = 1$

OSSERVAZIONI

I $\quad a^x = 0$ NON HA SOLUZIONI $\quad (S = \emptyset)$

II $\quad a^x > 0$ SEMPRE $\quad (S = \mathbb{R})$

III $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} > a^{x_2} & \text{se } 0 < a < 1 \quad a^x \text{ è STRETTAMENTE DECRESCENTE} \\ a^{x_1} < a^{x_2} & \text{se } a > 1 \quad a^x \text{ è STRETTAMENTE CRESCENTE} \end{cases}$

IV $\quad a^x = 1 \iff x = 0$

V $\quad a^x$ è INIETTIVA

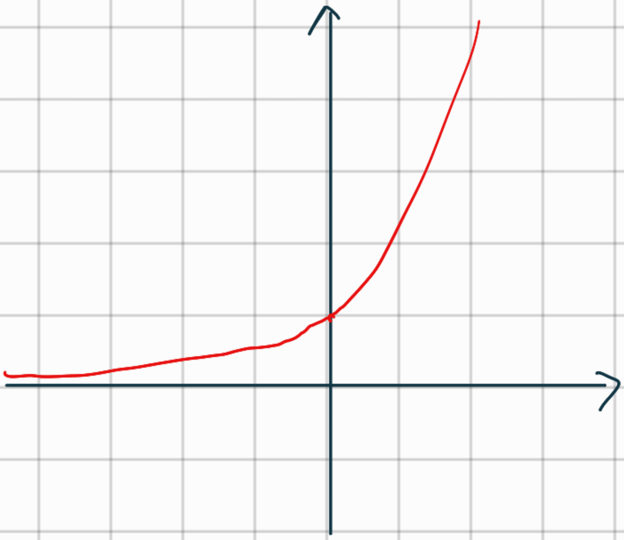
VI $\quad a^x$ è SURIETTIVA $\quad \left.\left(f : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty) \right)\right] a \neq 1$

ESEMPIO POPOLAZIONI

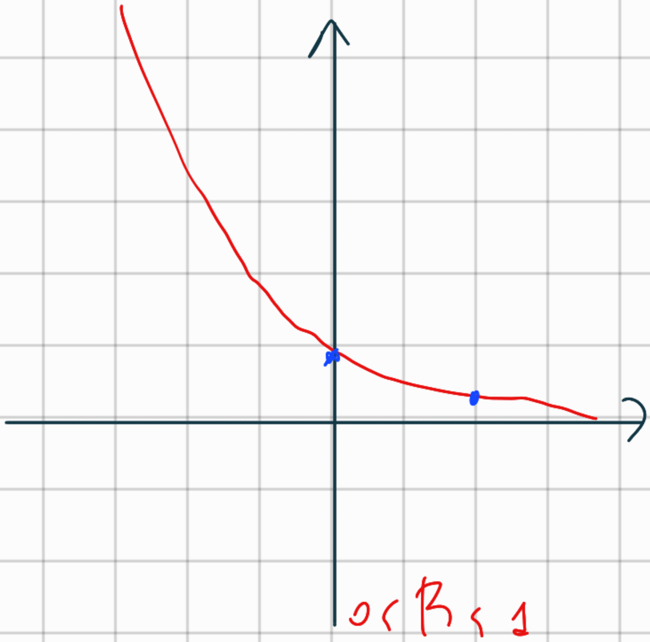
$$N(t) = R^t N_0$$

R COSTANTE $\quad R > 0$

N_0 NUMERO INIZIALE $\quad N > 0$



$R > 1$



$0 < R < 1$

Siccome $f(x) = a^x$ è INIETTIVA e SURIETTIVA possiamo definire la funzione inversa f^{-1}

$$f^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \log_a(x)$$

$y = \log_a(x)$ è quel numero che

$$\boxed{a^y = x \iff y = \log_a(x)}$$

ESEMPIO

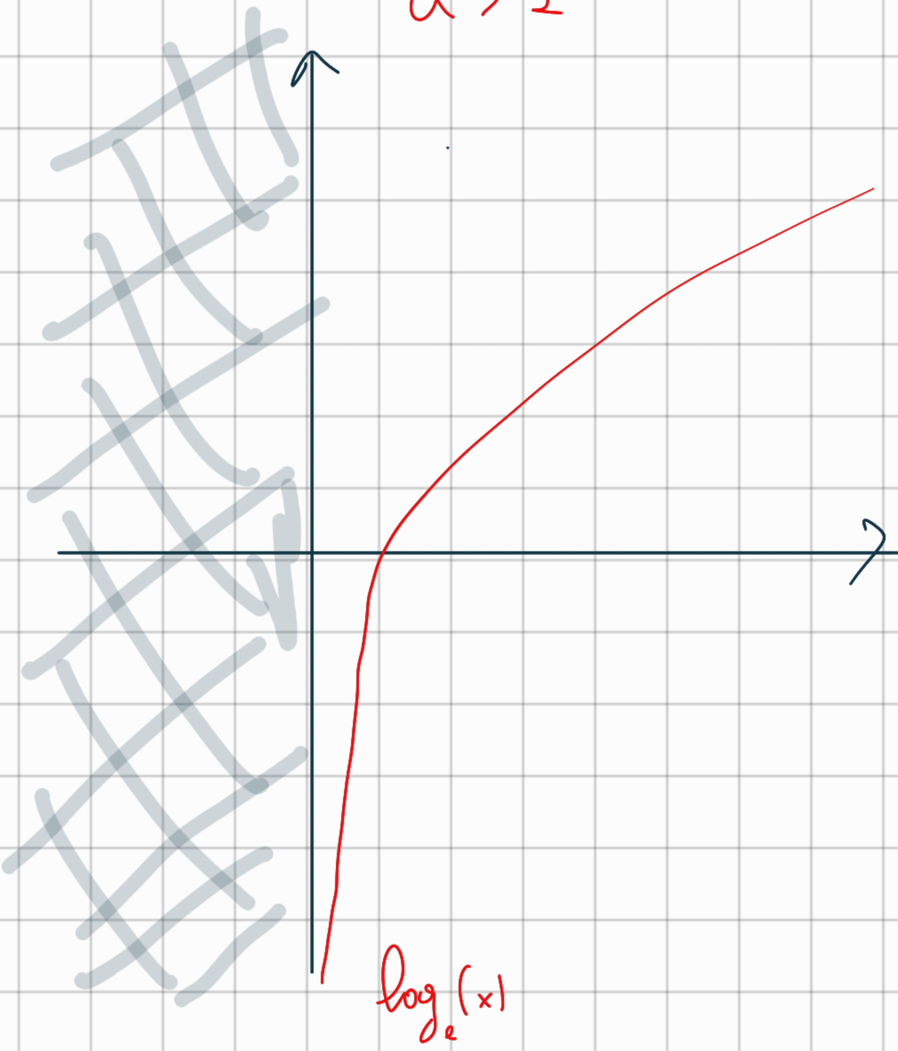
$\log_2(8) = y \qquad 2^y = 8 \Rightarrow y = 3$

$a^y = x \Rightarrow \boxed{a^{\log_a(x)} = x} \qquad f(f^{-1}(x)) = x$

$\boxed{\log(a^x) = x} \qquad f^{-1}(f(x)) = x$

$a > 1$

$0 < a < 1$



ESEMPIO

$$\log_{10}(1) = 0$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

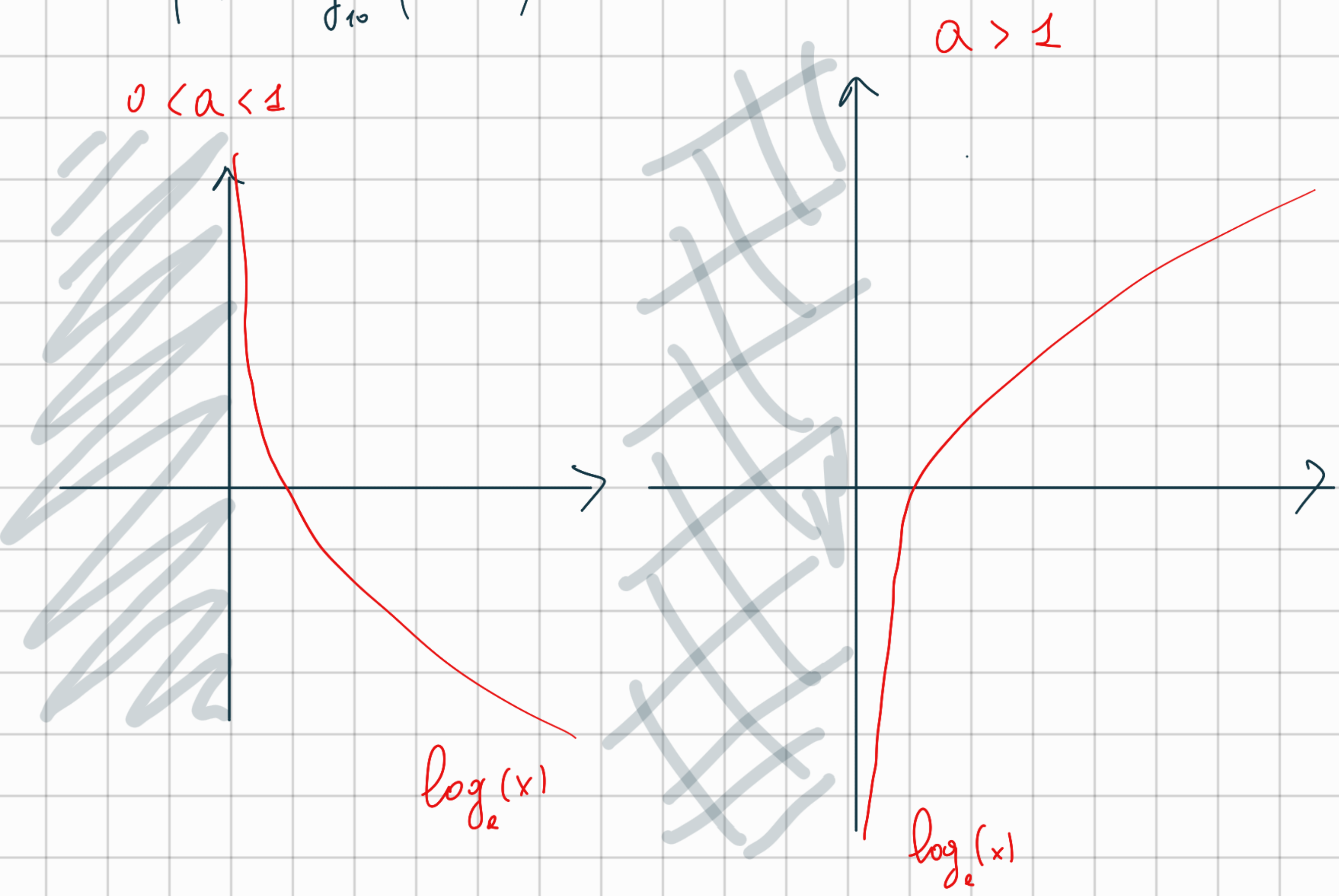
$$\log_{10}(100) = 2$$

SCALA RICHTER

$$\text{GRADO} = \log_{10}\left(\begin{array}{c}\text{QUANTITÀ CHE MISURA}\\ \text{LA POTENZA DEL TERREMOTO}\end{array}\right)$$

ALTRO ESEMPIO

$$pH = -\log_{10}([H^+])$$



OSSERVAZIONI SULLA FUNZIONE LOGARITMO

I $\quad \log_a(0)$

II $\quad \log_a(x) \quad x<0$

NON HANNO SENSO

Regola ③ delle C.E
Non si calcola il logaritmo di un numero negativo o di 0

$$\log(f(x)) \overset{C.E}{\Rightarrow} f(x)>0$$

III

$$x_1 < x_2 \rightarrow \begin{cases} \log(x_1) > \log(x_2) & \text{se} \quad 0<a<1 \\ \log(x_1) < \log(x_2) & \text{se} \quad a>1 \end{cases}$$

STR. DECRESCENTE

STR. CRESCENTE

IV

$$\boxed{\log_a(x) = 0 \iff x=1}$$

V $\quad$ È INIETTIVA (cioè $\log(x) = \log(y) \Rightarrow x=y$)

VI $\quad$ È SURIETTIVA

ESEMPIO
Risolvere l'equazione $\quad 5^x = 25$

Risposta: $x=2 \qquad x = \log_5(25) = \log_5(5^2) = 2$

ESEMPIO

Risolvere $5^x = 7$

$x = \log_5(7)$

$7 < 25$

Caso $a > 1$

$$1 = \log_5(5) < \log_5(7) < \log_5(25) < 2$$

Per definizione di logaritmo $\log_5(5^1) = 1$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

CASI PARTICOLARI

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

1. LOGARITMO DEL PRODOTTO

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

(LOGARITMO DEL RAPPORTO $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$)

2. LOGARITMO DI UNA POTENZA

$$\log_a(x^t) = t \cdot \log_a(x)$$

3. CAMBIAMENTO DI BASE $\forall a, b > 0 \quad x > 0$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

NOTAZIONE $\quad Log(x) = \log_{10}(x)$

LOGARITMO NATURALE $\quad \log(x) = \ln(x) = \log_e(x)$

$e \simeq 2{,}7$ NUMERO DI NEPERO (DI EULERO FUORI DALL' ITALIA)

PER QUESTO SI INDICA CON LA LETTERA e

$e \in \mathbb{R}$, $e \notin \mathbb{Q}$

$$e^x \qquad \ln(x)$$

HANNO DELLE PROPRIETÀ PARTICOLARI CHE VEDREMO PIÙ AVANTI, PER QUESTO SI USANO SPESSO