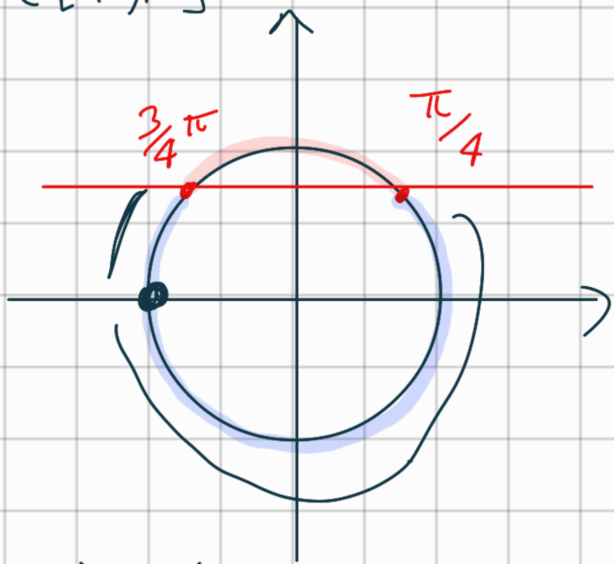
Lezione 13 21/11/2023

DISEQUAZIONI CON FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$$\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Studiare per } x \in [-\pi, \pi]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$$



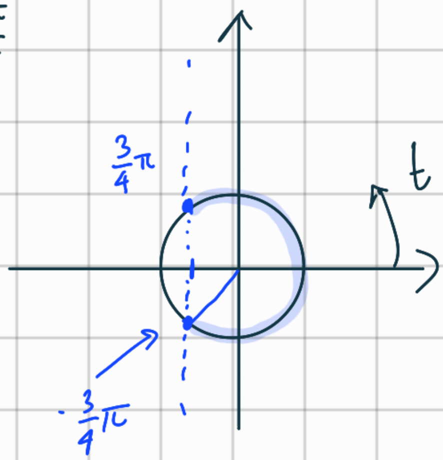
$$\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$$

$x \in [-\pi, \pi]$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t = 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\cos(t) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq t \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \qquad -\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = -\pi$$

$$\underbrace{-\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}}_{-\pi} + 2k\pi \leq 2x \leq \underbrace{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}} + 2k\pi$$

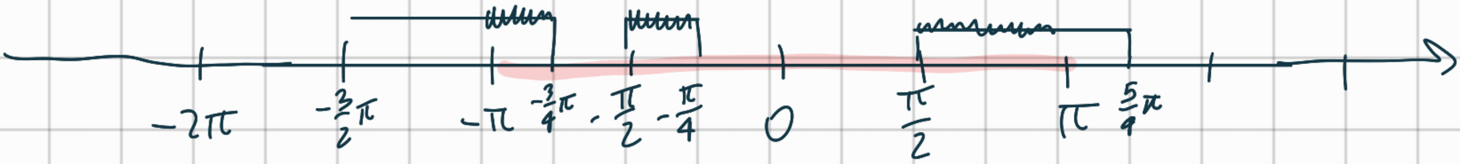
$$\boxed{-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

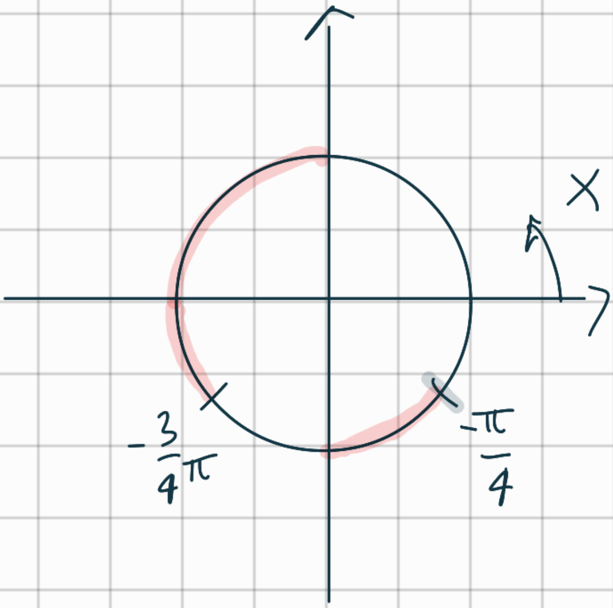
$k=0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \qquad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

$k=1 \qquad -\frac{\pi}{2}+\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+\pi \qquad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi\right] \to \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$k=-1 \qquad -\frac{\pi}{2}-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}-\pi \qquad \left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right] \to \left[-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right]$

$$S_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$





$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

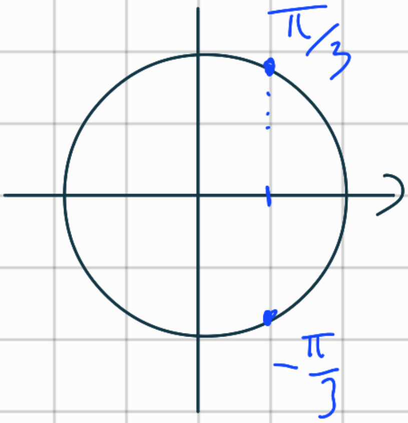
Dominio della funzione

$$f(x)=\sqrt{\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x-\cos x}} \qquad x\in[-\pi,\pi]$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x-\cos x}}$$

C.E.

$$\begin{cases} ① \ 2\cos^2 x-\cos x\neq 0 \\ ② \ \dfrac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x-\cos x}\geq 0\end{cases}$$



$$2\cos^2 x-\cos x\neq 0$$

$$(2\cos x-1)\cos x\neq 0$$

$$\cos x\neq 0 \quad \wedge \quad \cos x\neq \frac{1}{2}$$

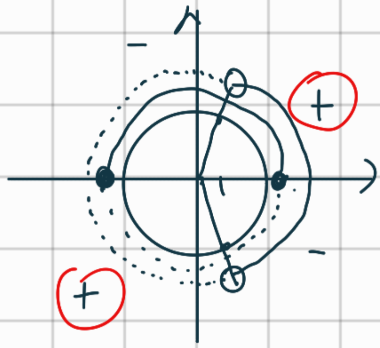
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$x\neq -\frac{\pi}{2},\ x\neq\frac{\pi}{2} \qquad x\neq\frac{\pi}{3} \quad x\neq -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\sin x\,\cancel{\cos x}}{(2\cos x-1)\cancel{\cos x}}\geq 0$$

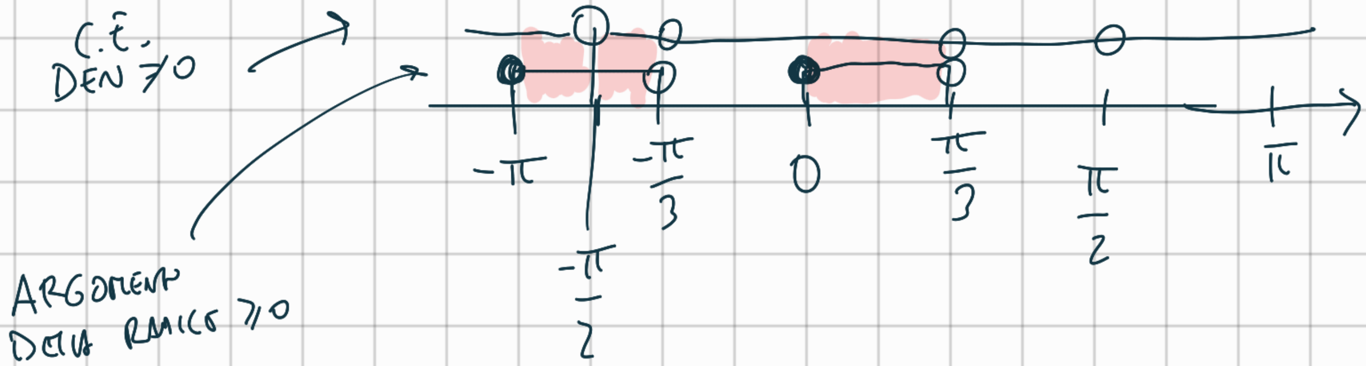
POICHÈ HO IMPOSTO $\cos x\neq 0$

$$\frac{2\sin x}{2\cos x-1}\geq 0$$

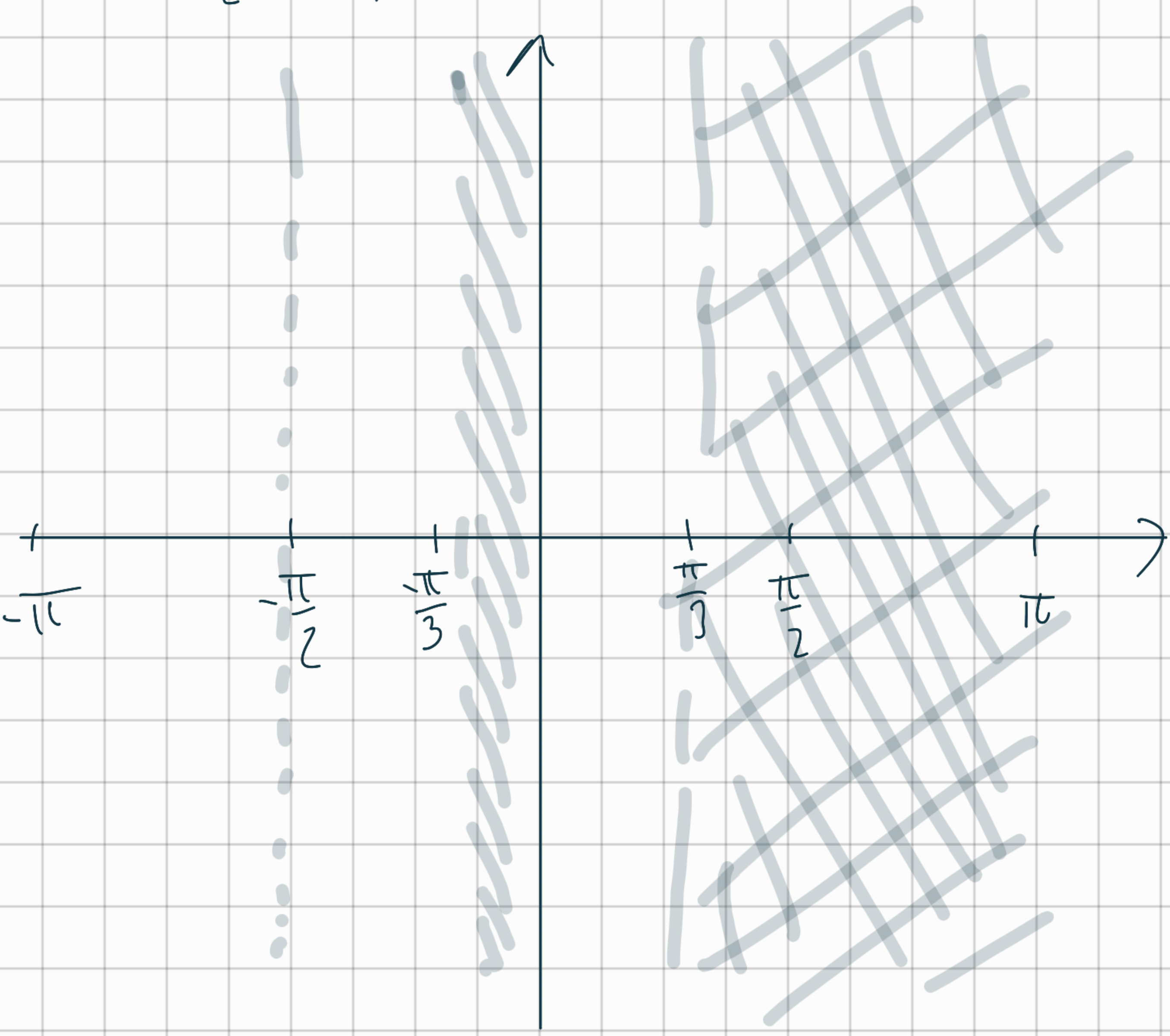


$2\sin x\geq 0$	$2\cos x-1>0$
$\sin x\geq 0$	$\cos x>\frac{1}{2}$
$0\leq x\leq\pi$	$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$

Soluzioni della DIS ② $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$



$$D = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$$



Studio di Funzione

- Dominio
- Segno e intersezione con gli assi
- Limiti
- Massimi minimi f crescente o decrescente — DERIVATA I
- Pti flesso — Concavità e convessità — DERIVATA II

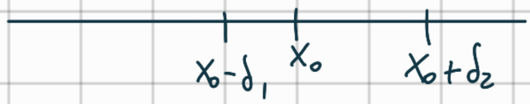
LIMITI

Lo scopo è quello di riuscire a capire come si comporta una funzione "vicino" a un punto oppure a $\pm\infty$

Definizione

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ un INTORNO COMPLETO di x_0 è un intervallo aperto (a,b) che contiene x_0

$$I(x_0) = \{x : \; x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2\}$$



Se $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ $\;I$ <u>INTORNO CIRCOLARE</u> $\quad\delta$ si dice <u>RAGGIO</u>

ESEMPIO

$x_0 = 1$

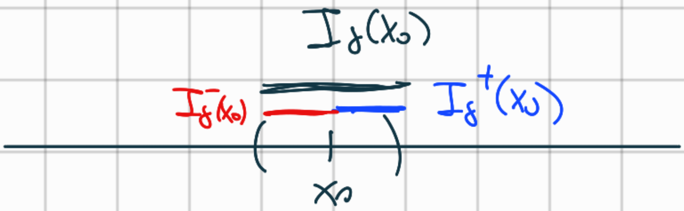
$I = (-1, 3)$ è UN INTORNO DI x_0

$I = (0.99990, 1.000001)$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \iff \underbrace{|x - x_0|}_{} < \delta$$

$$I_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta) \qquad \text{INTORNO DESTRO}$$

$$I_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0) \qquad \text{INTORNO SINISTRO}$$



$x_0 = 1 \qquad \delta = 0.2 \qquad I_\delta(1) = (0.8, 1.2)$

$$I_\delta^+(1) = (1, 1.2)$$

$$I_\delta^-(1) = (0.8, 1)$$

Definizione

$a, b \in \mathbb{R}$

UN QUALSIASI INTERVALLO $(a, +\infty)$ è un INTORNO DI $+\infty$

" " " $(-\infty, b)$ è un INTORNO DI $-\infty$

Definizione

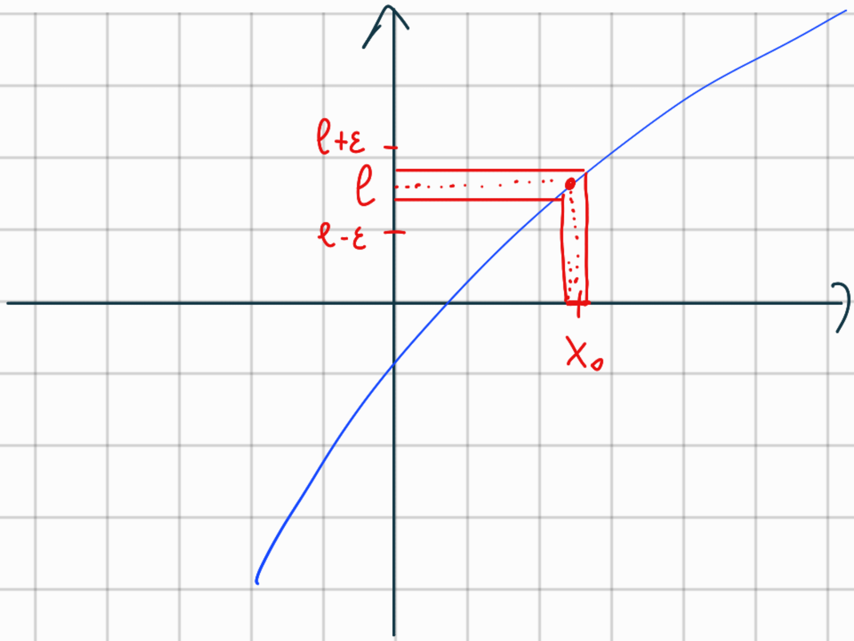
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ SI DICE CHE IL LIMITE PER X CHE TENDE A x_0 DI $f(x)$ È UGUALE A $l \in \mathbb{R}$

E SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$$\Longleftrightarrow$$

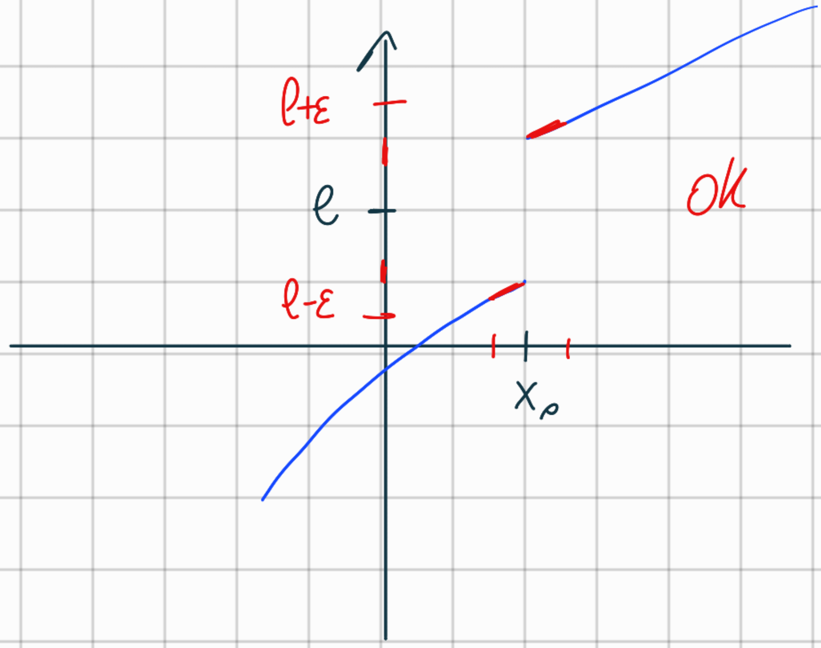
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\delta(x_0) \text{ tale che } \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

ε PICCOLO A PIACERE



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

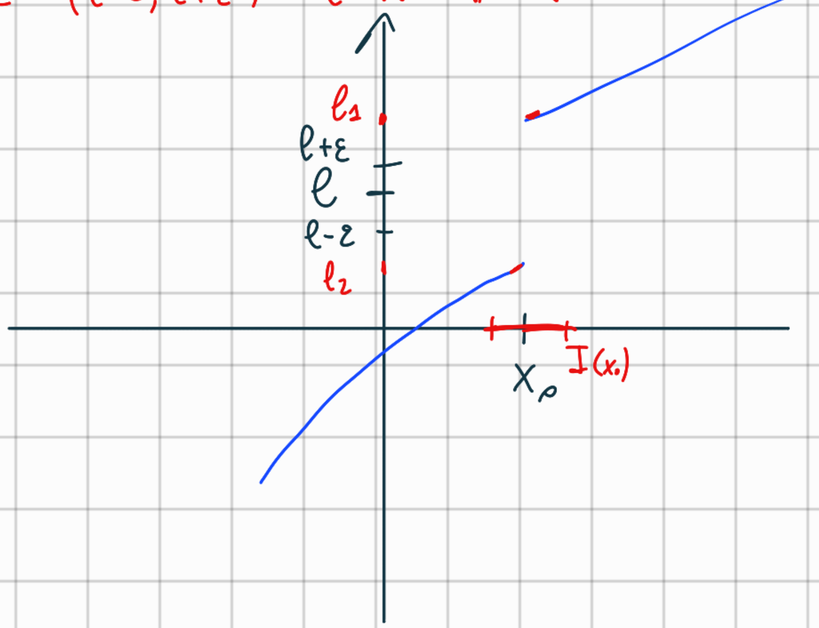
$\varepsilon = 1,5$



SICCOME $f(x) \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ è NON VA BENE

con $x \in I$

$\varepsilon = 0.5$

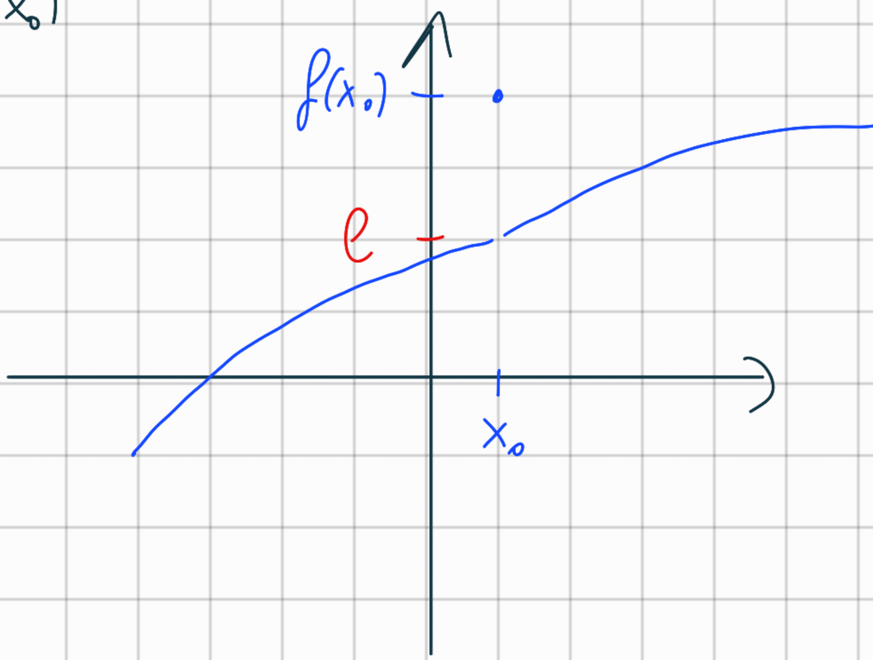


Definizione

Sia $x_0 \in D$ diciamo che f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ESEMPIO DI FUNZIONE NON CONTINUA



diremo che f è continua in un insieme $A \subseteq D$ se f è continua $\forall x_0 \in A$

Se $A = D$ f è continua

Definizione

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ SI DICE CHE

IL LIMITE DESTRO (o SINISTRO) PER X CHE TENDE A x_0 DI $f(x)$ È UGUALE A $\ell \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0^+ \, (x_0^-)} f(x) = \ell \iff$$

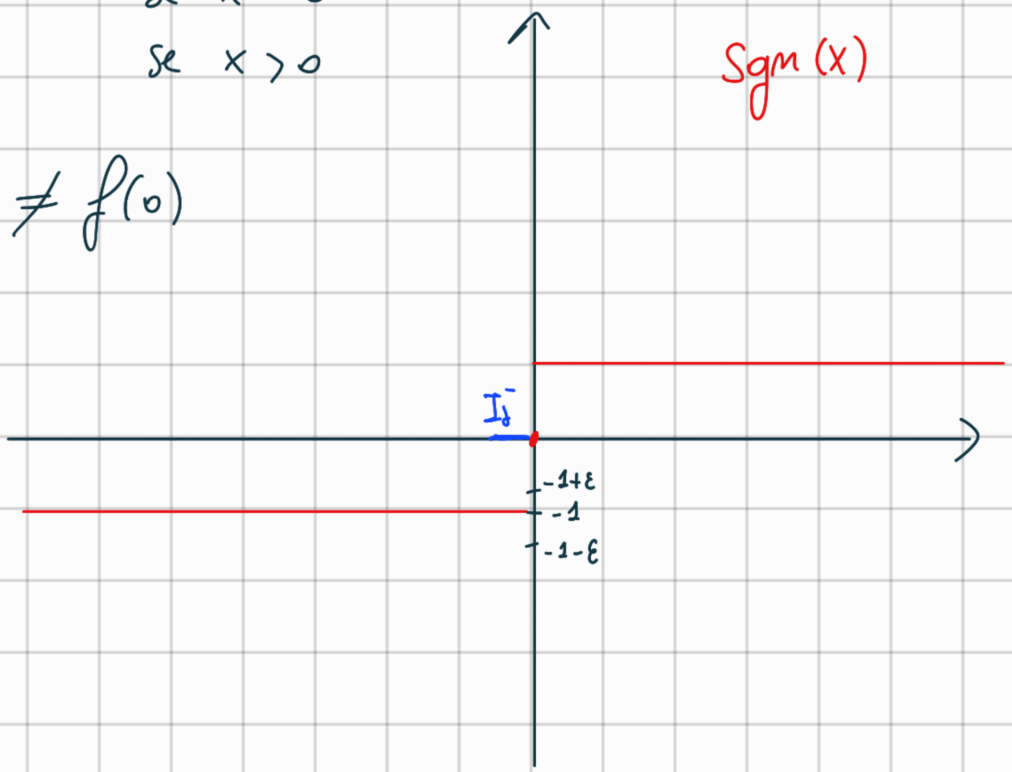
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\delta^{+(-)}(x_0) \quad \text{tale che} \quad \forall x \in I^{+(-)}(x_0) \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ESEMPIO

$$\operatorname{Sgn}(x) \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{Sgn}(x) = +1$$

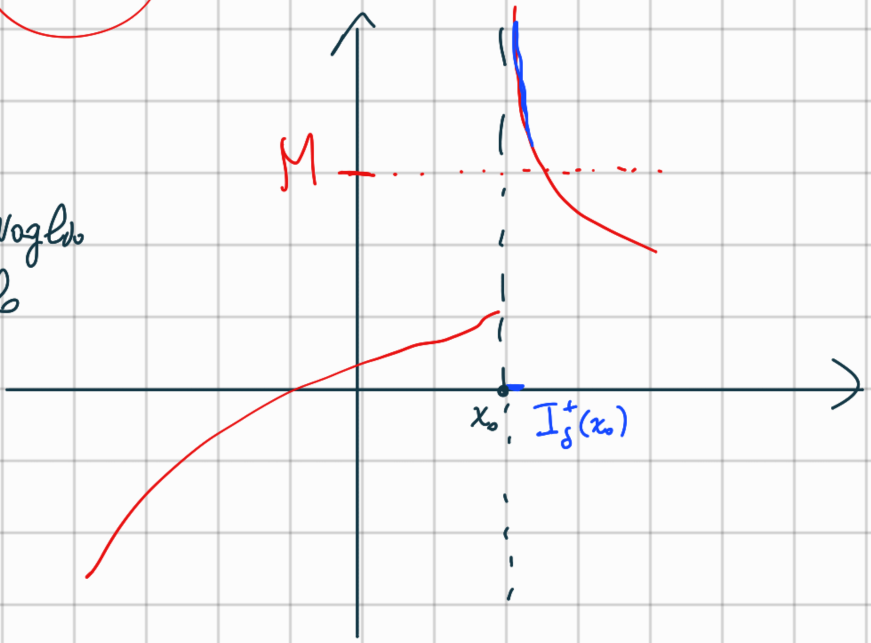


DIREMO CHE

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.c.} \ f(x) > M \ \forall x \in I_\delta^+(x_0)$$

M è GRANDE A PIACERE

Posso scegliere M grande quanto voglio riesco a trovare SEMPRE un piccolo intorno DESTRO $I_\delta^+(x_0)$ tale che $f(x)$ è più grande di M per tutti gli x che appartengono all'intorno

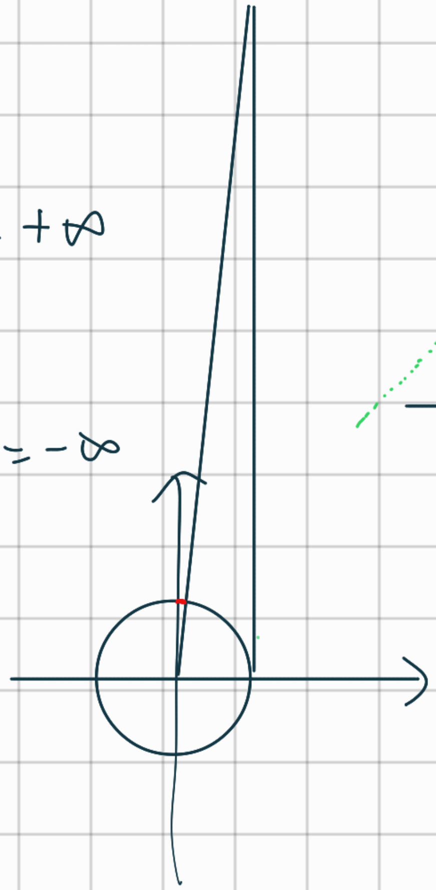


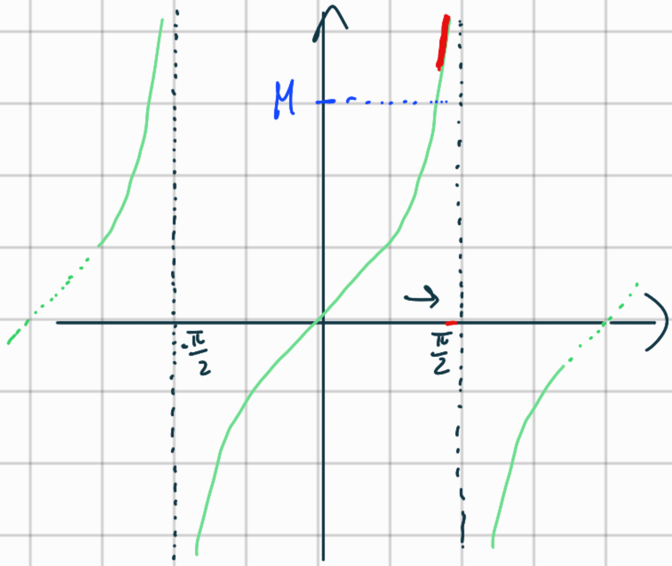
DIREMO CHE $x = x_0$ è UN ASINTOTO VERTICALE (A DESTRA)

PER $f(x)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} tg(x) = -\infty$$

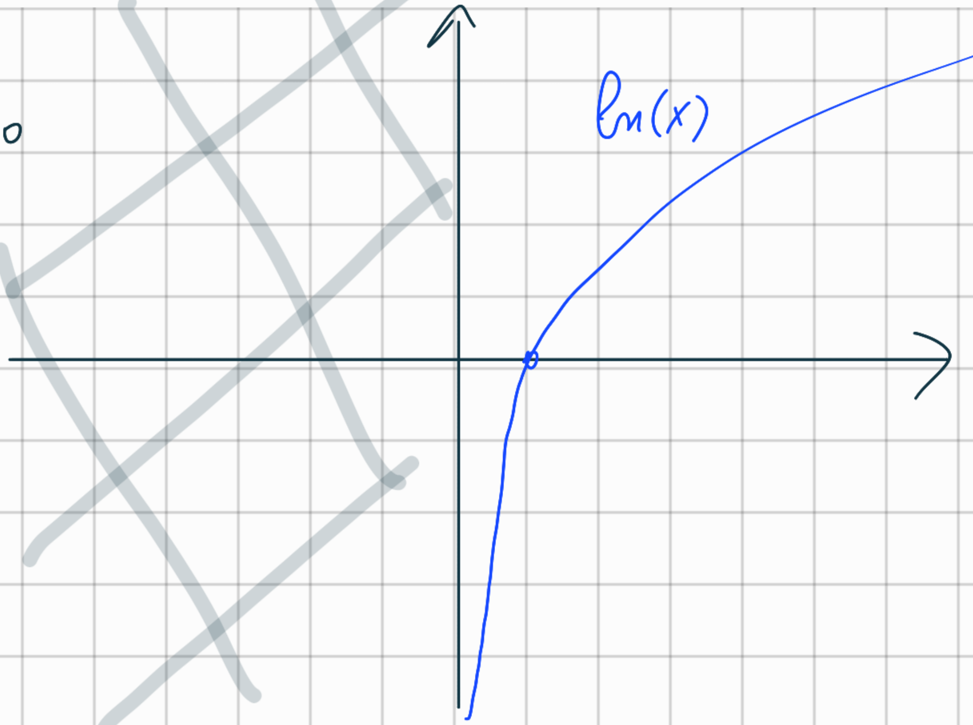




$x = \frac{\pi}{2}$ È UN ASINTOTO VERTICALE (A SINISTRA) PER $f(x)$ (È ANCHE A DESTRA)

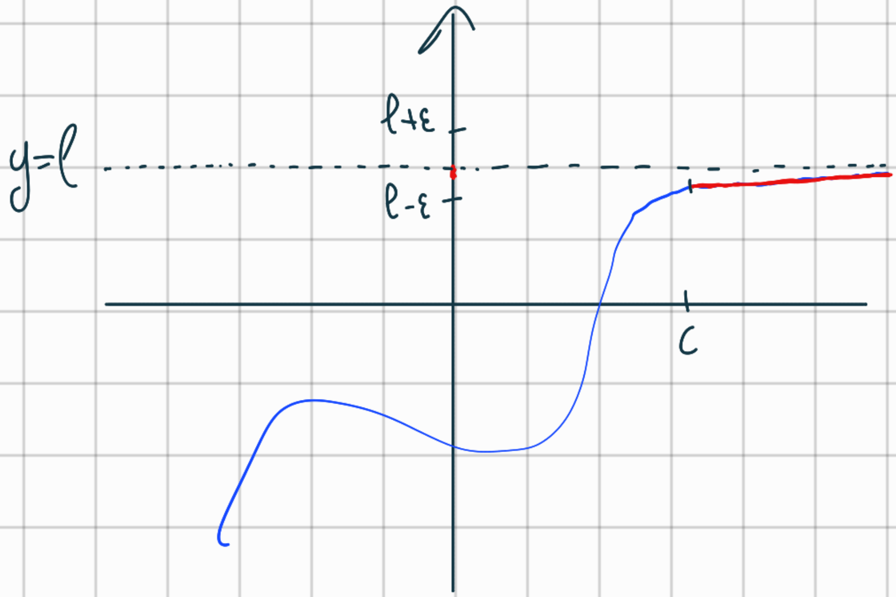
$X = 0$ È UN ASINTOTO VERTICALE PER $\ln(x)$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty}$$



Definizione (LIMITE FINITO $x \to \infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists c > 0 \text{ t.c. } |f(x) - \ell| < \varepsilon \ \forall x > c$$



DIREMO CHE $y = \ell$ è UN ASINTOTO ORIZZONTALE A $+\infty$