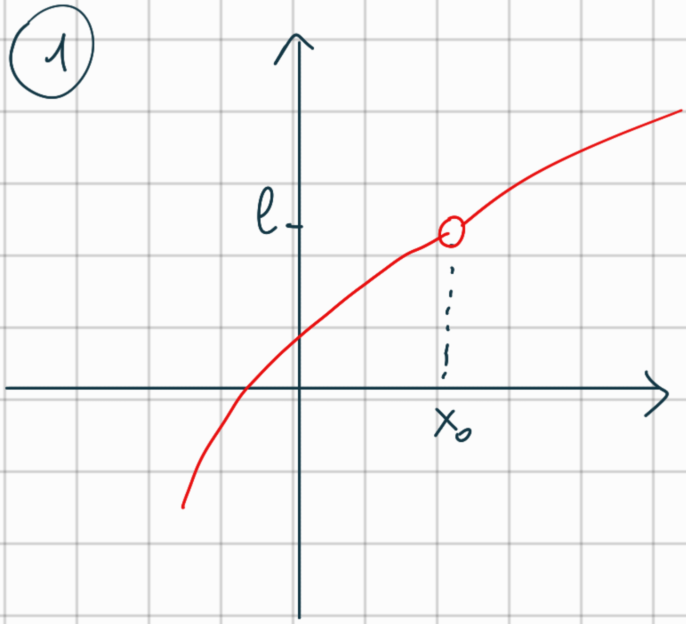
LEZIONE 14 24/11/23

LIMITI

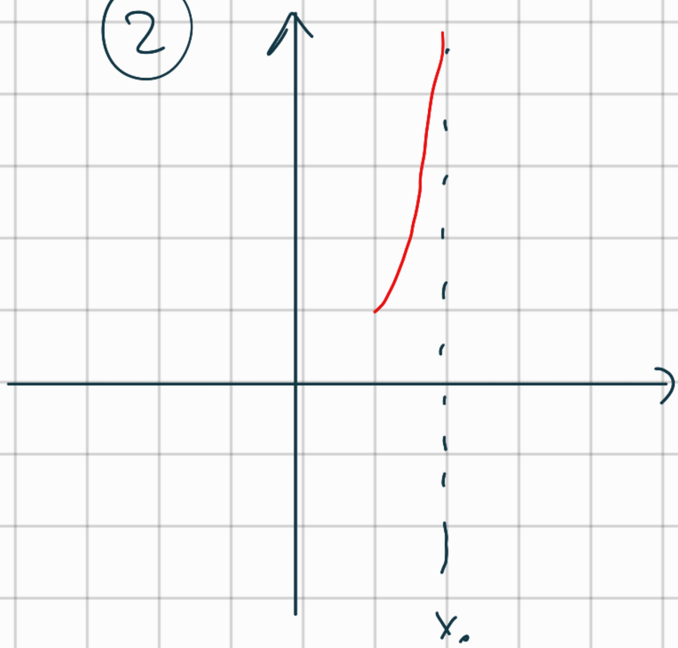
$x \to x_0$ FINITO

1



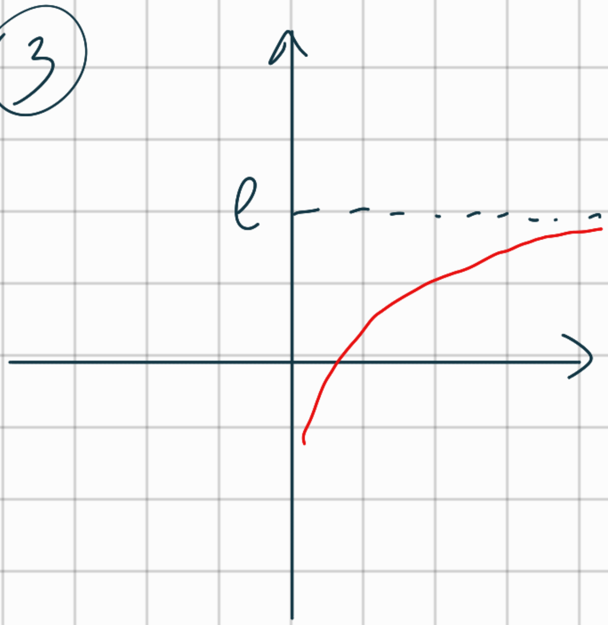
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

2



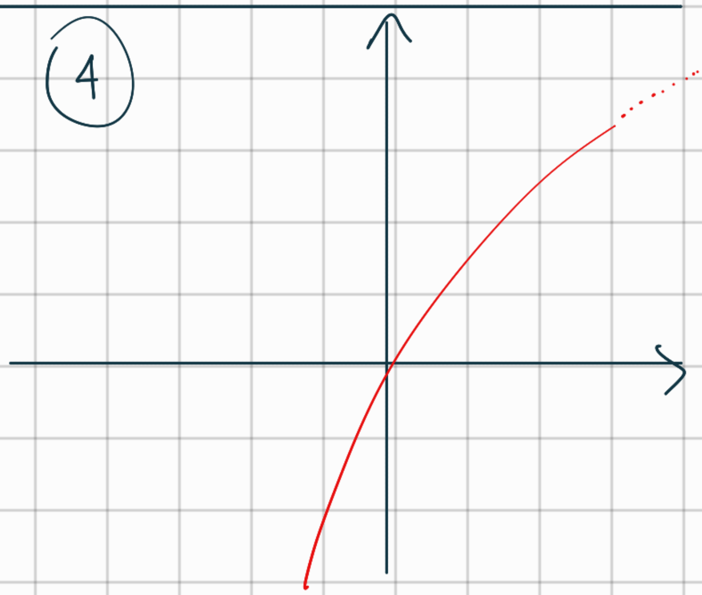
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

3



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$$

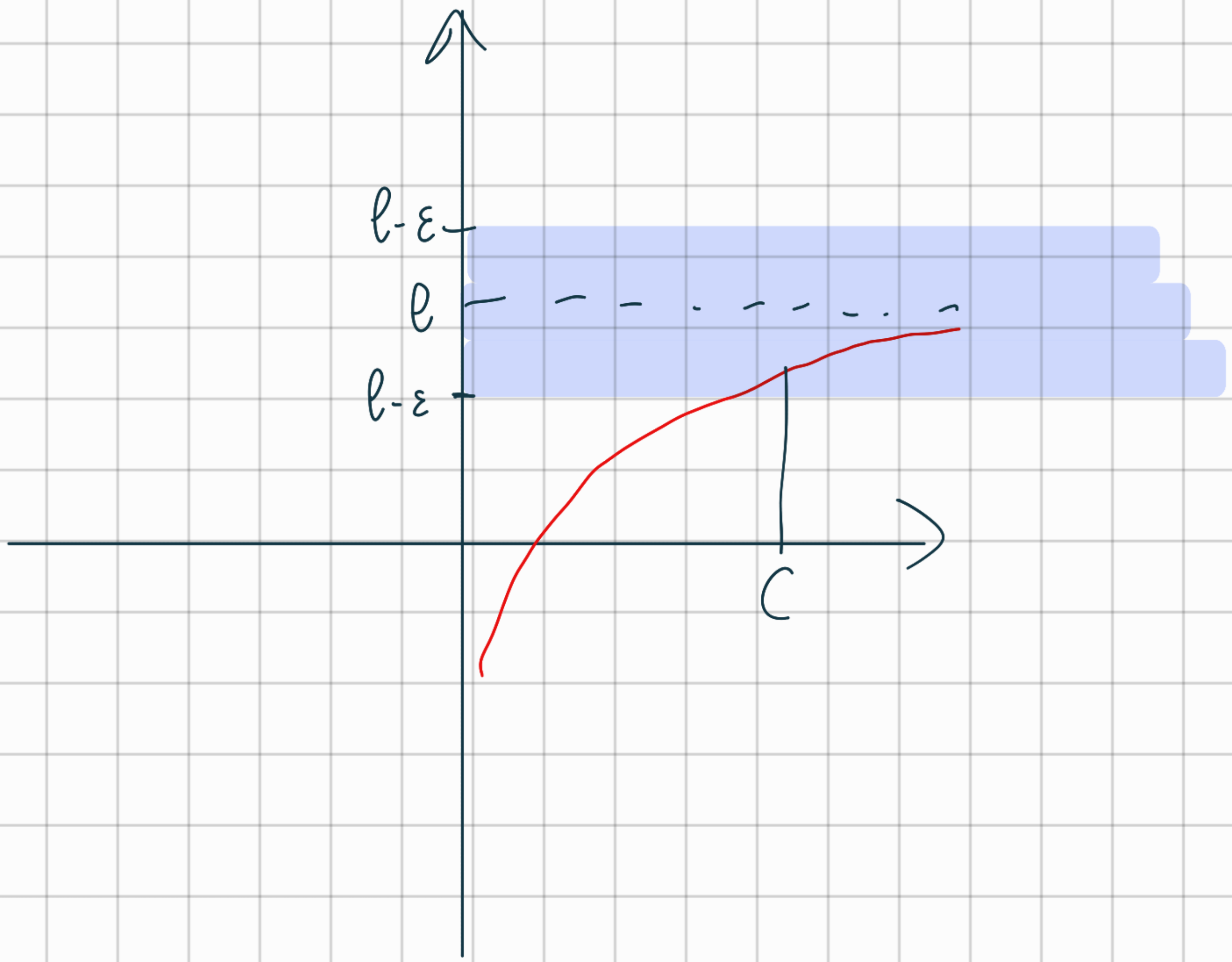
4



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

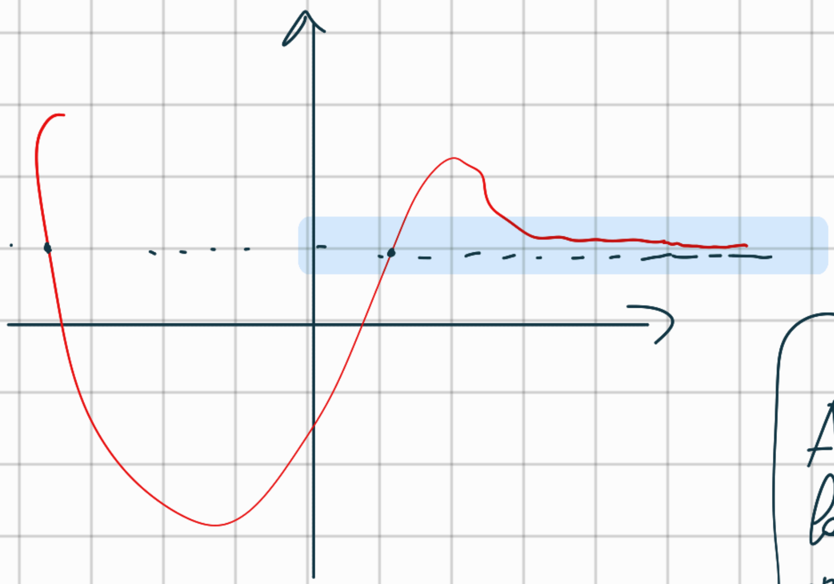
(3)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0$ (<) t.c. $\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > c$ (<)

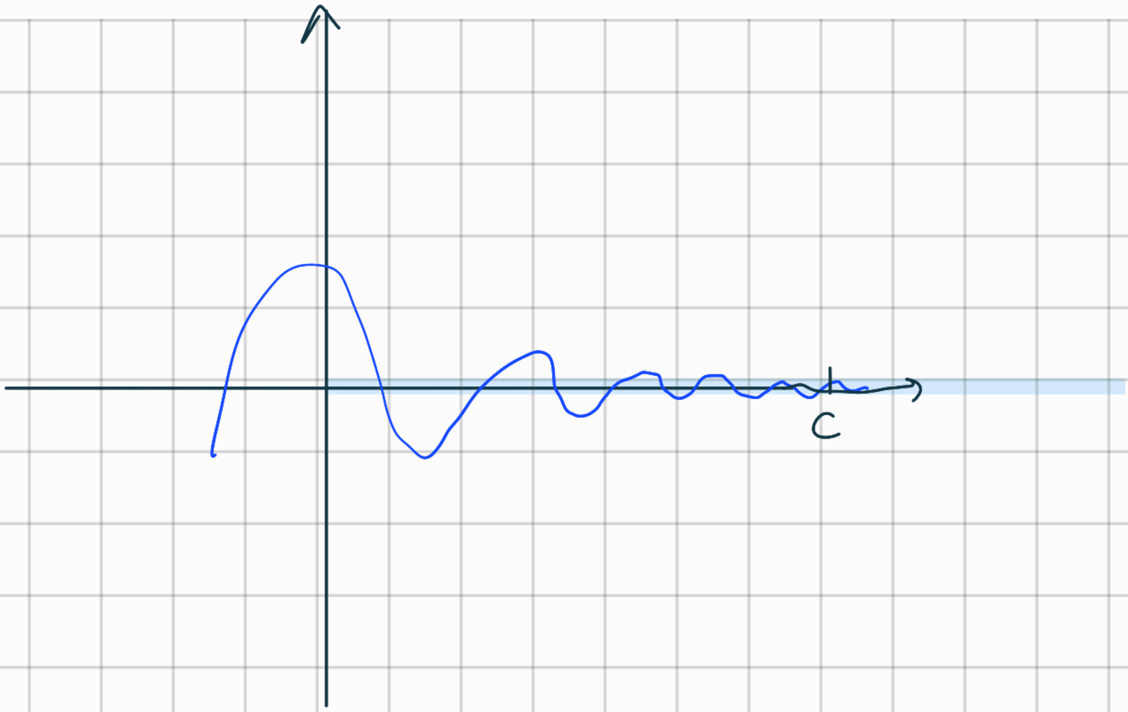


$\forall x > c \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

SI DIRÀ CHE $y = \ell$ è UN ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO (SINISTRO)

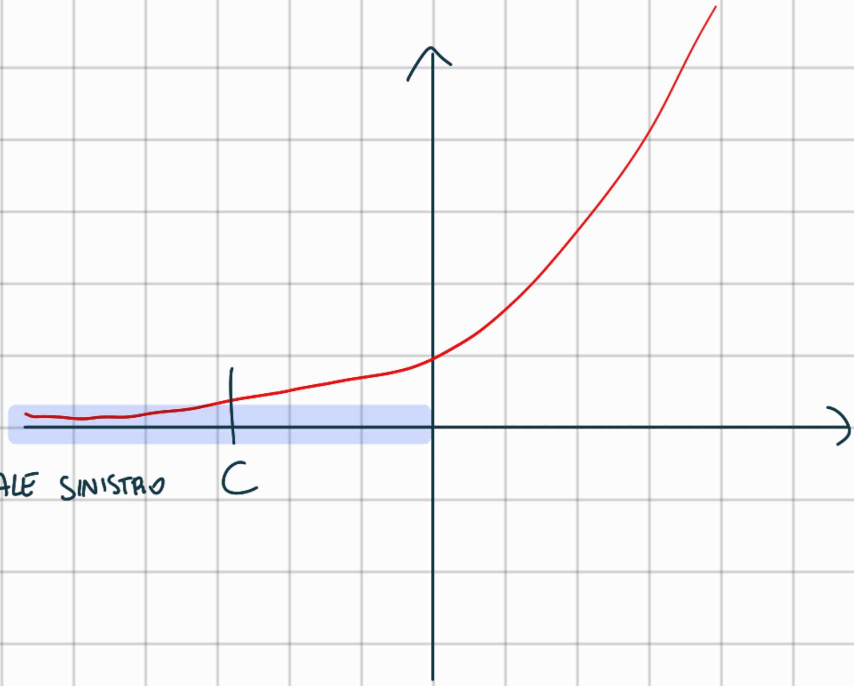


NOTA
Al contrario dell' ASINTOTO VERTICALE la funzione può "toccare" un ASINTOTO ORIZZONTALE



ESEMPI

di funzioni con ASINTOTO ORIZZONTALE



$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$$

$$\Downarrow$$

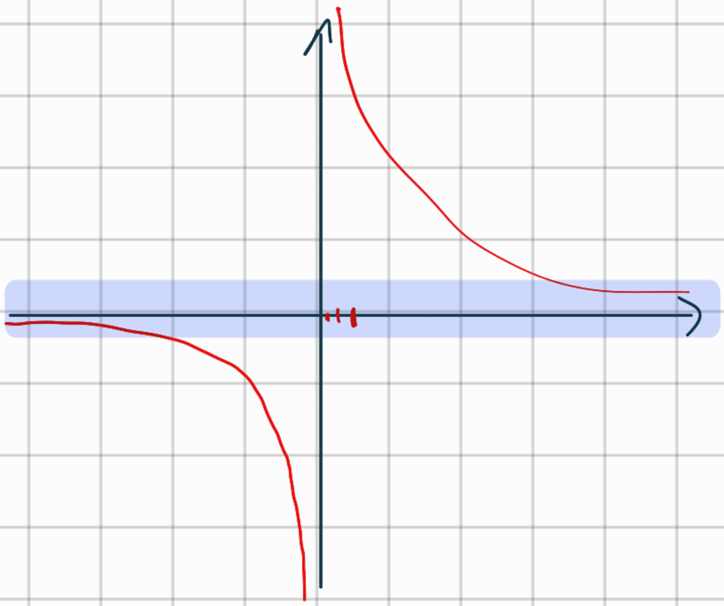
$y = 0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE SINISTRO PER e^x

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

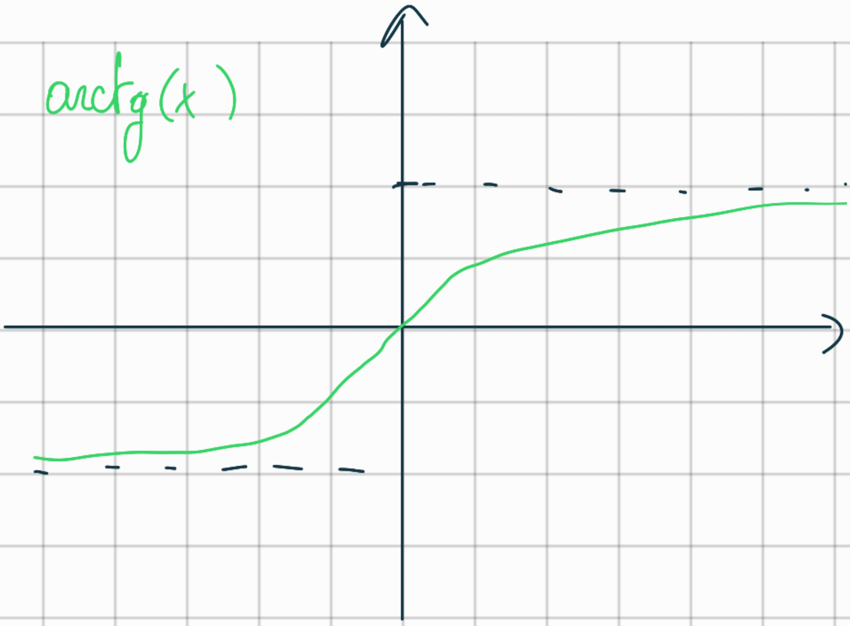
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$y = 0$ A.O.



$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

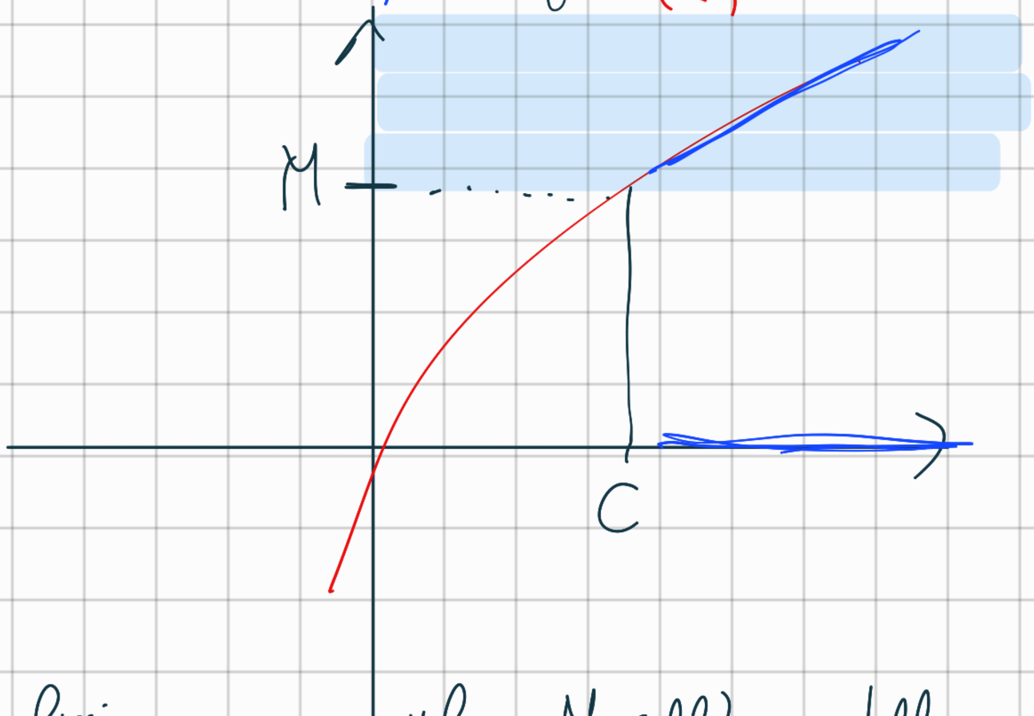
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$



---

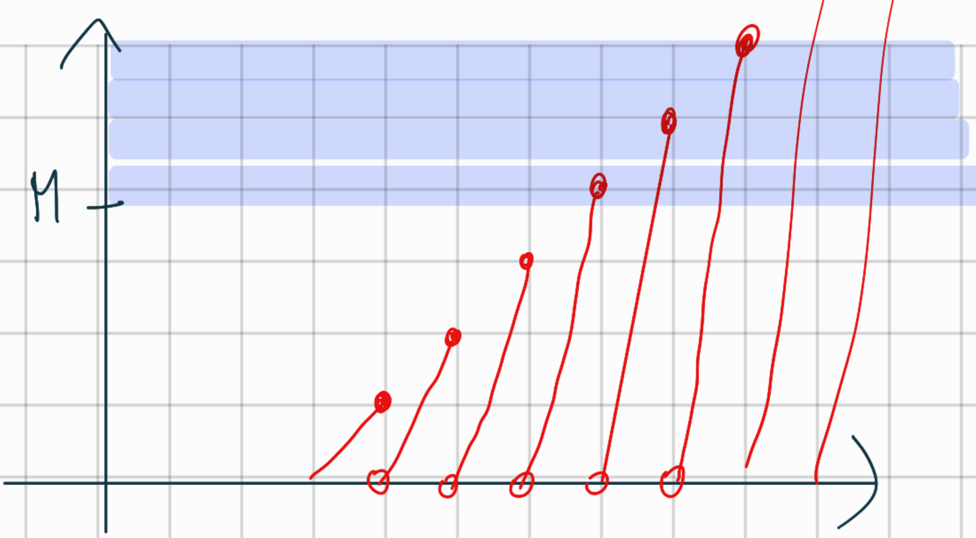
(4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ SI DICE CHE LA FUNZIONE DIVERGE a $+\infty$ $(-\infty)$ per $x \to +\infty$ $(-\infty)$

$\forall M > 0$ $(<)$ $\exists c > 0$ $(<)$ t.c. $\forall x$ $x > c$ $(<)$ $f(x) > M$ $(<)$



Ogni volta che fissiamo un valore M sull'asse delle y troviamo un punto c sull'asse delle x tale che per tutti i punti da c in poi la funzione è più grande di M.

QUESTA
FUNZIONE
NON HA LIMITE

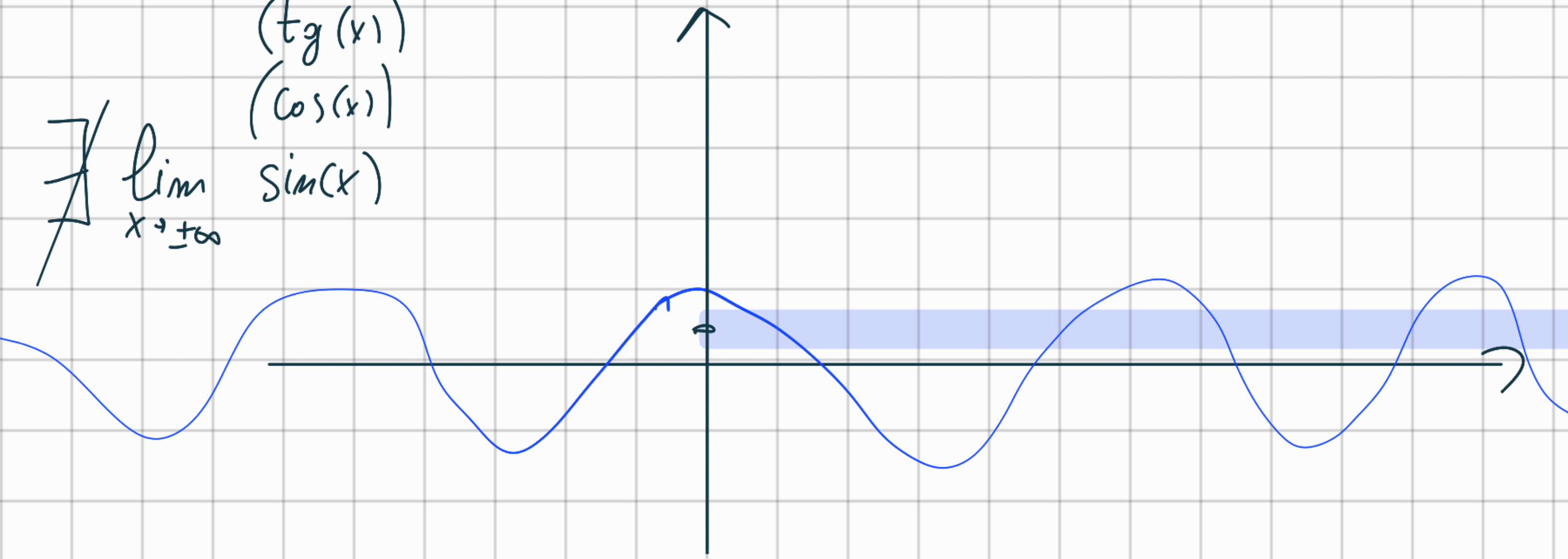


La funzione non supera M **PER SEMPRE**, torna sempre al di sotto.

$(\mathrm{tg}(x))$

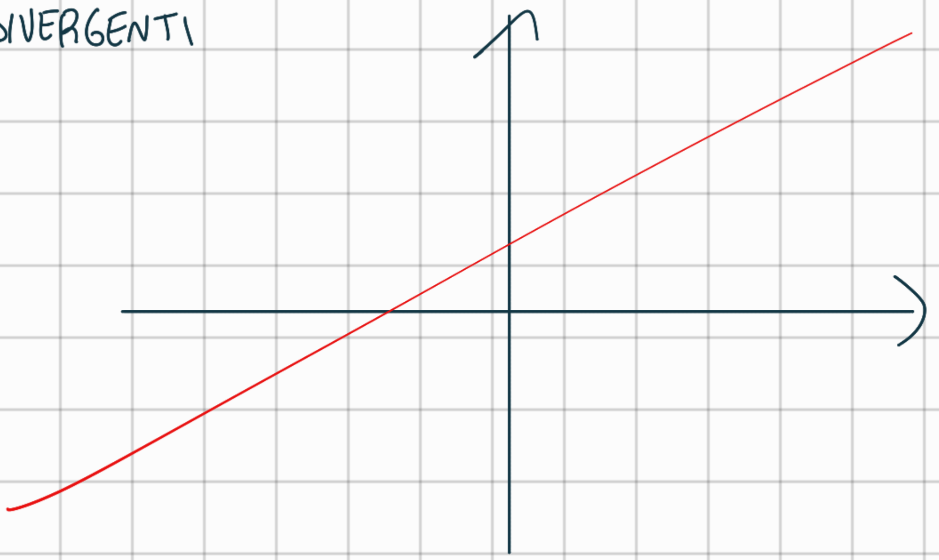
$(\cos(x))$

$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \sin(x)$



ESEMPI DI FUNZIONI DIVERGENTI

$\lim_{x \to \infty} (mx+q) = \infty$

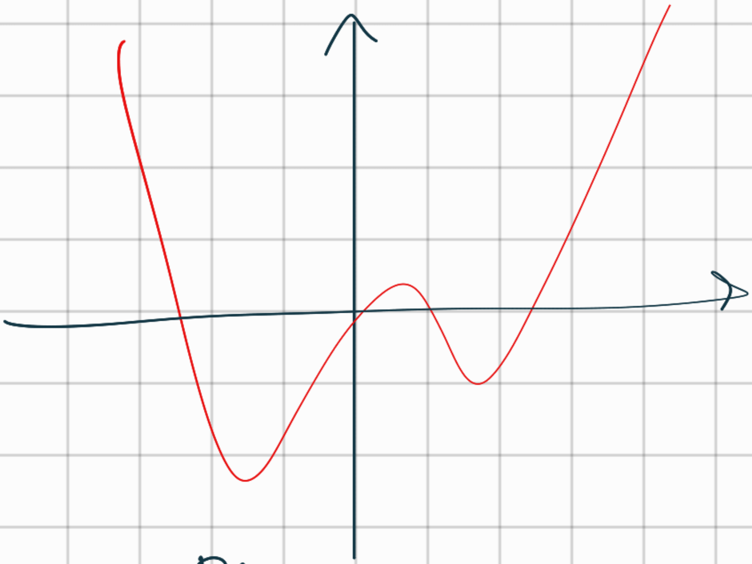


PER TUTTI I POLINOMI $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$$\lim_{x \to +\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty & a_n > 0 \\ -\infty & a_n < 0 \end{cases}$$

SE $a_n > 0$

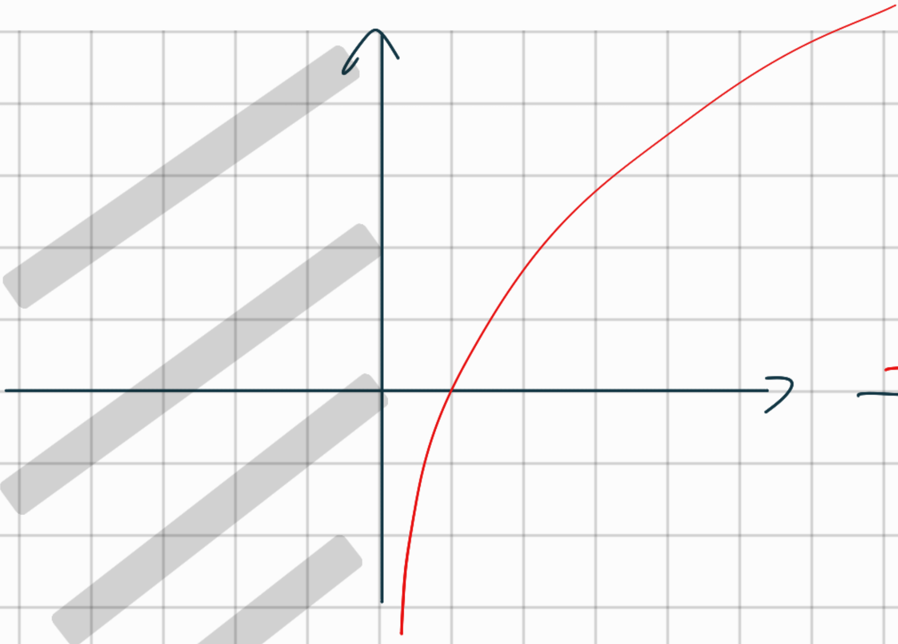
$$\lim_{x \to -\infty} P_n(x) = \begin{cases} +\infty & n \text{ PARI} \\ -\infty & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$



n PARI

n DISPARI

QUESTO È IL MOTIVO PER CUI UN POLINOMIO DI GRADO DISPARI HA SEMPRE ALMENO UNA RADICE.

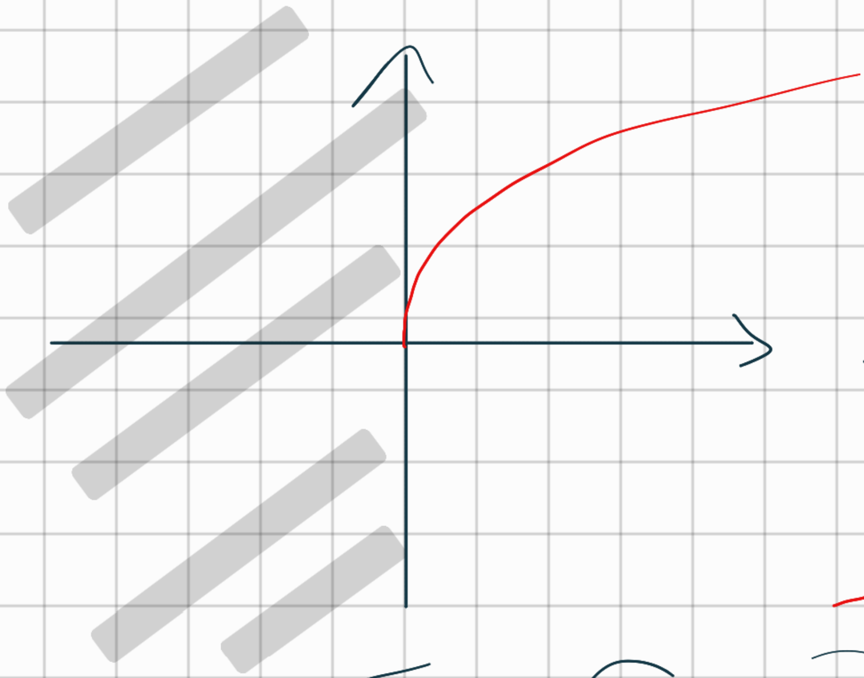


$\ln(x)$

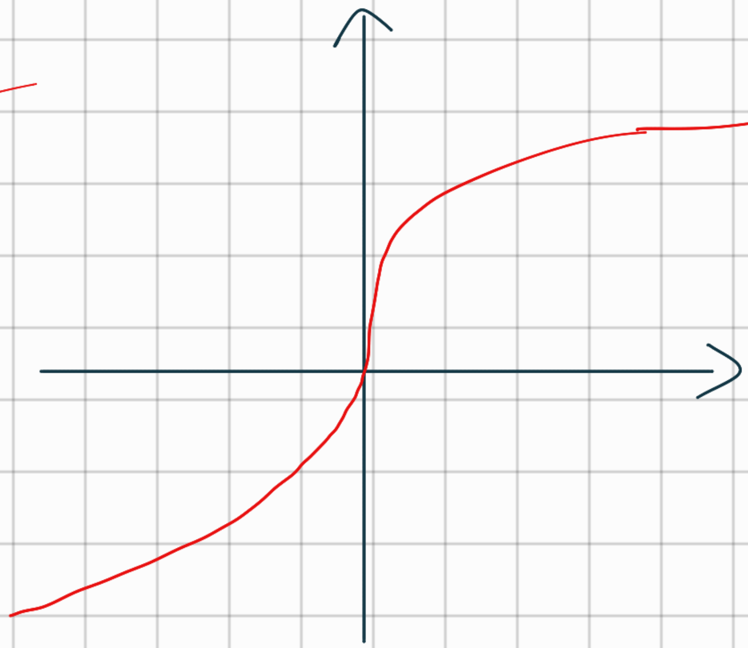
e^x

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$



$\sqrt[n]{x}$



$\sqrt[n]{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

n PARI

$\downarrow$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x}$ NON HA SENSO

n DISPARI

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

PROPRIETÀ DEI LIMITI $\quad * \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- $\lim_{x \to *} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to *} f(x) + \lim_{x \to *} g(x)$ LIMITE SOMMA

- $\lim_{x \to *} f(x) g(x) = \left(\lim_{x \to *} f(x)\right)\left(\lim_{x \to *} g(x)\right)$ LIMITE PRODOTTO

SUPP. $\lim_{x \to *} g(x) \neq 0$

- $\lim_{x \to *} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to *} f(x)}{\lim_{x \to *} g(x)}$ LIMITE RAPPORTO

$$\begin{cases} +\infty \pm l = +\infty \\ -\infty \pm l = -\infty \end{cases}$$

Queste scritture è da intendersi "una funzione che tende a infinito più una che tende a un valore finito $\pm l$ tende a infinito"

$$\begin{cases} +\infty + \infty = +\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \end{cases}$$

$+\infty - \infty = F.I.$

DIPENDE DA QUALI SONO LE FUNZIONI

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0^+} \left[(x^2-1) + \frac{1}{x}\right] = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} (x^2-1)}_{-1} + \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -1 + \infty = +\infty$$

SICCOME x^2-1 È UNA FUNZ. CONTINUA TENDE A $0^2-1=-1$

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 - x^3 = +\infty$$

$$x^4 \to +\infty \qquad -x^3 \to -\infty$$

PERCHÈ x^4 È UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE NEL SENSO CHE VA A INFINITO (CRESCE) PIÙ VELOCEMENTE DI x^3

GERARCHIA DEGLI INFINITI

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \begin{cases} e^x \\ x^n \\ \sqrt[n]{x} \\ \ln(x) \end{cases} \quad \gtrless \quad x^p \qquad \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[2]{x^3} = -\infty$$

$$x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{2}}$$

PRODOTTO DEI LIMITI

NOTA: RISPETTANDO REGOLA DEI SEGNI

$$(\pm\infty)(\pm \ell) = \pm\infty \qquad \text{NOTA}$$

$$\ell \neq 0 \qquad \frac{(\pm\infty)}{\pm \ell} = \pm\infty \qquad \text{NOTA}$$

$$\frac{\pm \ell}{0^{\pm}} = \pm\infty \qquad \text{NOTA}$$

$$\frac{\pm \ell}{\pm\infty} = 0$$

	+	−
+	+	−
−	−	+

$$\frac{0^{\pm}}{\pm\infty} = 0$$

$$\frac{\pm\infty}{0^{\pm}} = \pm\infty \qquad \text{NOTA}$$

$$\pm\infty \cdot 0 = F.I$$

$$\frac{\infty}{\infty} = F.I$$

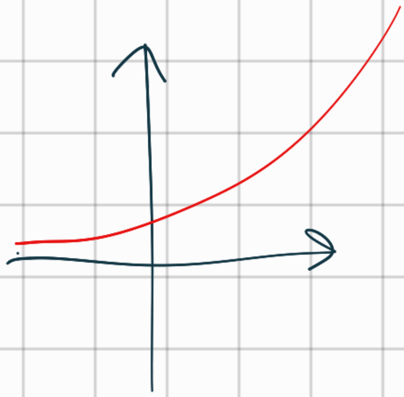
$$\frac{0}{0} = F.I$$

ESEMPI

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x+1}{\ln(x)} = \frac{1}{-\infty} = -\infty$$

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{e^x} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x-4}{x^2-8x+16} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

$16 - 32 + 16$

SONO POLINOMI $\Rightarrow$ $(x-4)$ E' "INCLUSO" IN ENTRAMBI

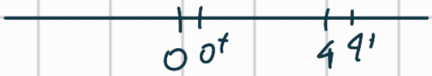
RICORDO:

x_0 è SOL $P(x) \iff P(x) = (x-x_0)^n Q(x)$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{x^2-8x+16} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x-4)} = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\underset{4^+-4}{x-4}} = +\infty$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -8 & 16 \\ 4 & & 4 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$(x \quad -4)$



$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \to \begin{cases} \infty & \text{se } f(x) \text{ è di ordine superiore} \\ 0 & \text{se } g(x) \text{ è di ordine superiore} \\ \ell & \text{se sono dello stesso ordine} \end{cases}$$

ESEMPI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{x^4-2}}{\underset{\to +\infty}{100x^3+x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{\ln(x)}}{\underset{\to +\infty}{x^3-1}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-7x+3}{5x^2-1} = \frac{3}{5}$$

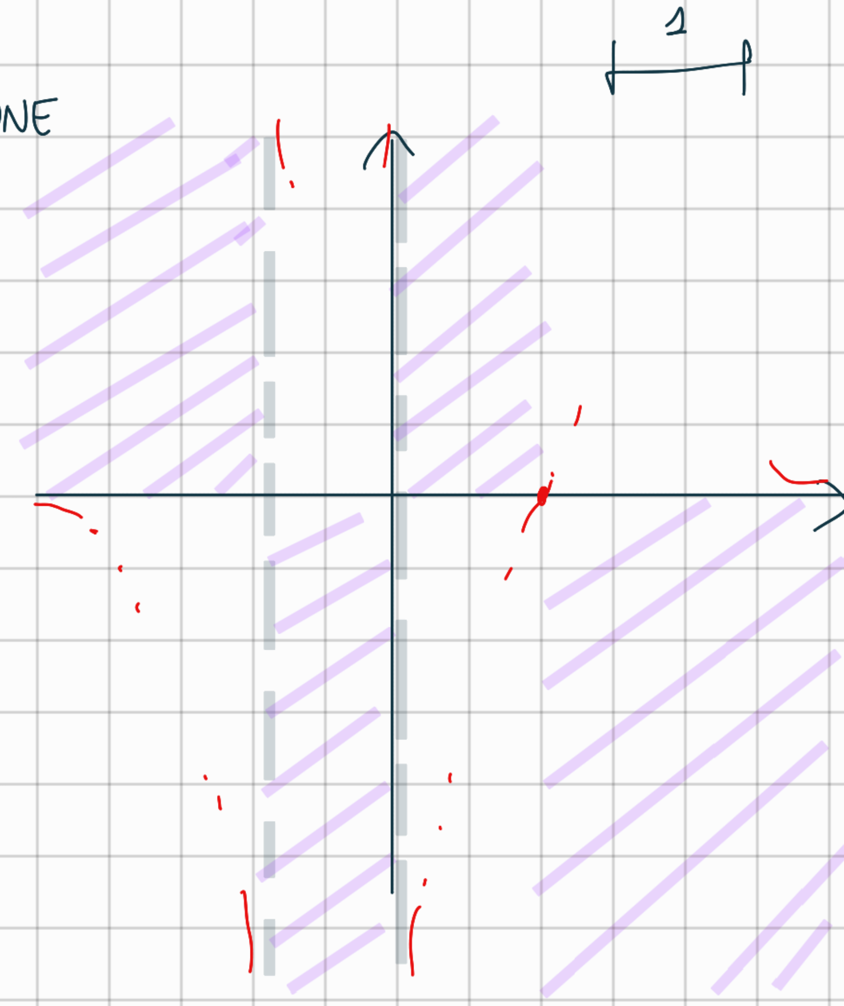
LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{\boxed{x\to 0}} \boxed{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

PER $x \to 0$

$$\sin x \sim x$$

STUDIAMO LA FUNZIONE



$$f(x) = \frac{x-1}{8x^2+7x}$$

- DOMINIO DI $f(x)$

$$8x^2+7x \neq 0$$
$$x(8x+7) \neq 0$$
$$\hookrightarrow x \neq 0$$
$$\hookrightarrow x \neq -\frac{7}{8}$$

$$D = \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cup \left(-\frac{7}{8}, 0\right) \cup (0, +\infty)$$

- STUDIO DEL SEGNO

$$\frac{x-1}{8x^2+7x} \geq 0 \implies -\frac{7}{8} < x < 0 \quad \vee \quad x \geq 1$$

$\Downarrow$ SICCOME C'È $\geq$

$$x \in \left(-\frac{7}{8}, 0\right) \cup [1, +\infty)$$

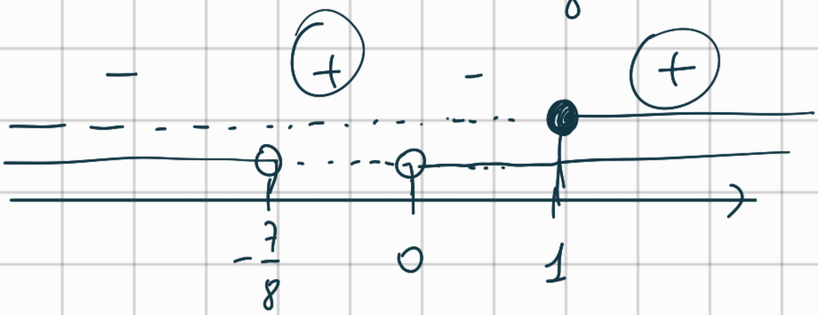
$$f(1) = 0 \qquad A = (1, 0)$$

$$x - 1 \geq 0$$
$$x \geq 1$$

$$8x^2 + 7x > 0$$
$$x(8x+7) > 0$$

le sol. dell'eq. associata $x = -\frac{7}{8}$, $x = 0$

$$x < -\frac{7}{8} \lor x > 0$$



NON CALCOLO $f(0)$ PERCHÉ $0 \notin D$

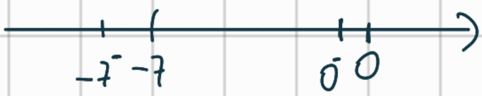
VOGLIAMO SCOPRIRE COSA SUCCEDE AGLI ESTREMI DEL DOMINIO : $D = \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cup \left(-\frac{7}{8}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ DEVO CALCOLARE IL LIMITE PER CIASCUNO DI QUESTI 6 ESTREMI

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{8x^2+7x} = 0$$

A.O. (COMPLETO) $y = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{8x^2+7x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\frac{7}{8}^-} \frac{x-1}{x(8x+7)} = \frac{\ominus}{\ominus(-7^- + 7)} = \frac{\ominus}{\ominus \; 0^-} = -\infty$$



$$\lim_{x \to -\frac{7}{8}^+} \frac{x-1}{x(8x+7)} = \frac{\ominus}{\ominus(-7^+ + 7)} = \frac{\ominus}{\ominus \; 0^+} = +\infty$$

A.V. COMPLETO. $x = -\frac{7}{8}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x(8x+7)} = \frac{-1}{0^-(7)} = +\infty$$

$x=0$ A.V. COMPLETO

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x(8x+7)} = \frac{-1}{0^+(7)} = -\infty$$