Lezione 15 27/11/23

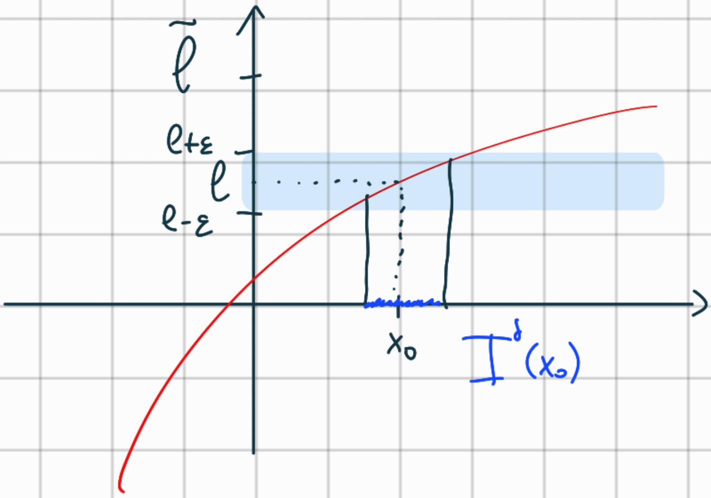
TEOREMI SUI LIMITI

TEOREMA: [UNICITÀ DEL LIMITE] NO-DIM

Se $f(x)$ tende a ℓ per x che tende a x_0 $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\right)$

tale limite è unico. (OSSIA $\nexists\, \tilde{\ell}\neq\ell$ tale che $\lim_{x\to x_0} f(x)=\tilde{\ell}$)

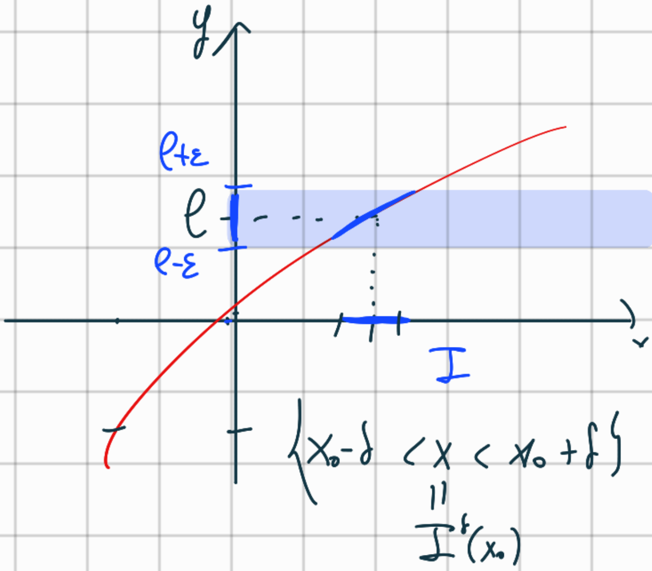
[NOTA
QUESTO TEOREMA VALE ANCHE
SE $x_0, \ell, \tilde{\ell}$ SONO $\pm\infty$]



TEOREMA [PERMANENZA DEL SEGNO]

Se $f(x)$ tende a $\ell\neq 0$ per $x\to x_0$ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\neq 0\right)$

Allora $\exists\, I$ intorno di x_0 in cui $f(x)$ e ℓ hanno (MANTENGONO) lo stesso segno.



DIMOSTRAZIONE (SUPP $>$)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell>0$$

$$\Downarrow$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\, I^\delta(x_0)$ t.c. $\forall x\in I(x_0)\setminus\{x_0\}$

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$\Downarrow$ SICCOME VALE PER TUTTI GLI ε

Scelgo UN PARTICOLARE ε $\quad \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ ✓ $\quad$ (Se $\ell < 0$ DEVO SCEGLIERE $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$)

$\forall I^{\frac{\ell}{2}}(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\quad |f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$

$$-\frac{\ell}{2} + \ell < f(x) - \ell + \ell < \frac{\ell}{2} + \ell$$

$$\underbrace{0 < \frac{\ell}{2}} < f(x) < \frac{3}{2}\ell$$

$$\boxed{f(x) > 0}$$

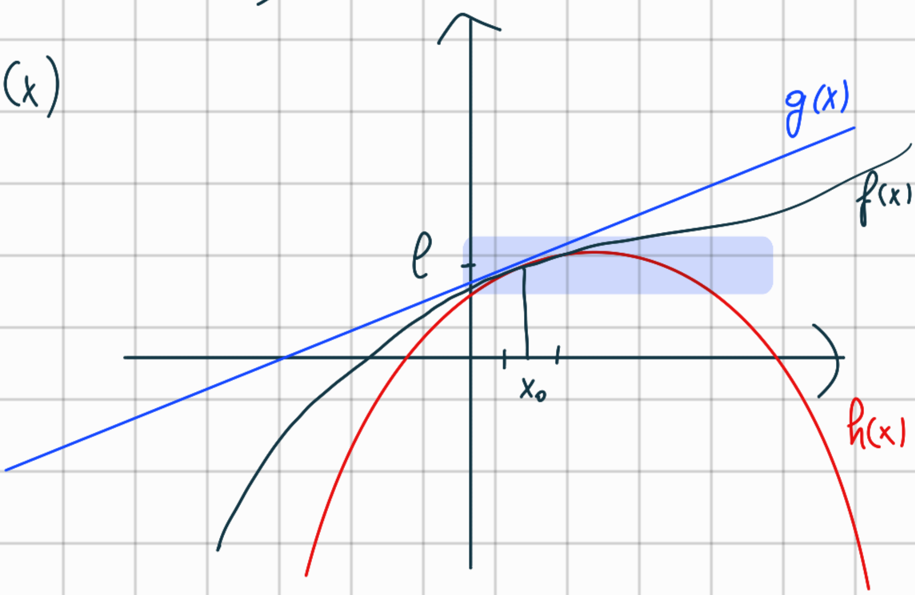
$f(x)$ HA LO STESSO SEGNO DI ℓ

$\square$ QUESTO SIMBOLO SI METTE PER CONCLUDERE UNA DIMOSTRAZIONE

TEOREMA [CONFRONTO (DEI CARABINIERI)] NO DIM

SE $\quad h(x) \le f(x) \le g(x)$

- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \rightarrow$
- $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \rightarrow$

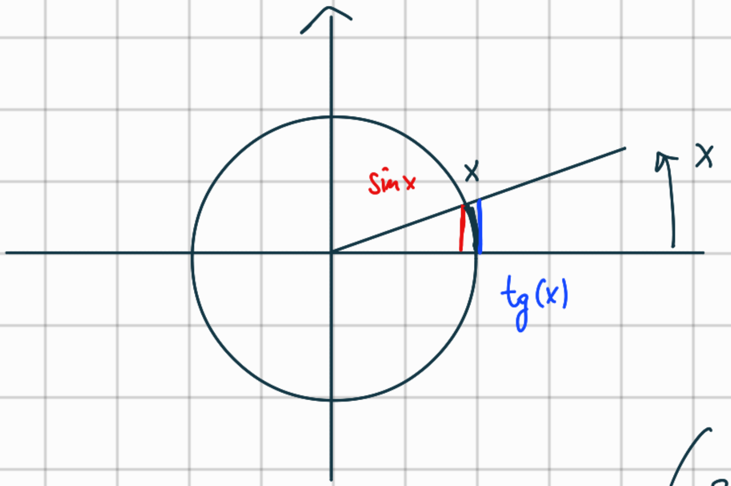


$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

APPLICAZIONE DEL TEOREMA AL LIMITE NOTEVOLE $\frac{\sin x}{x}$ PER $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



DIMOSTRAZIONE

$$\left(\begin{array}{c} 2 < 3 < 4 \\ \downarrow \\ \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\sin x < x < tg(x)$$

$$\downarrow$$

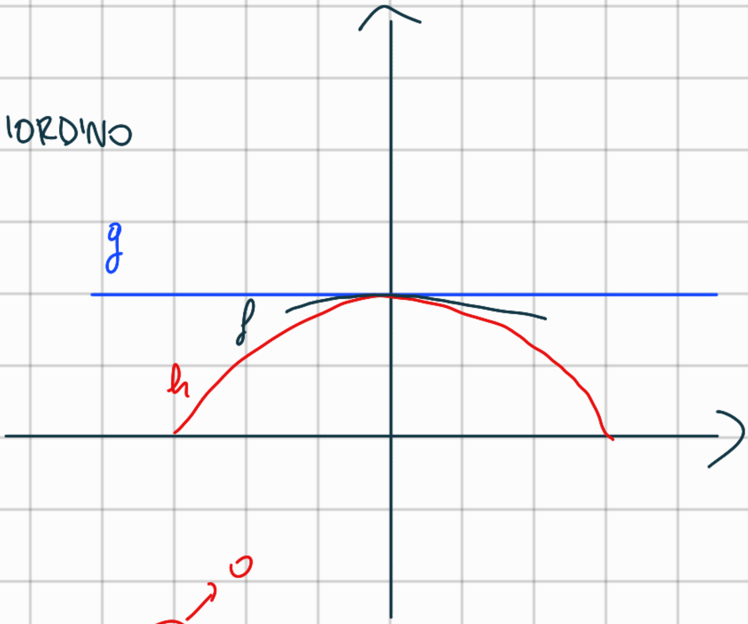
$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{tg(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$\downarrow$ MOLTIPLIC PER $\sin(x)$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$\downarrow$ RIORDINO

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 0}{\sin x}}{\underset{\to 0}{x}} = 1$$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ PER DEFINIZIONE
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ESERCIZI

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} / \cancel{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$

ALTRE FORME INDETERMINATE (CON LA POTENZA)

0^0

∞^0

1^∞

PER RISOLVERLI SI UTILIZZA $e^{\ln(a)} = a$

- $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(x)}}$ $= F.I$ $\quad x \to 0$, $\frac{1}{\ln(x)} \to 0$

• $a = x^{\frac{1}{\ln x}}$

• $\ln(a^b) = b\ln(a)$

$$\lim_{x\to 0} e^{\ln\left(x^{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\cancel{\ln(x)}}\cancel{\ln(x)}} = e$$

- $$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-3}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-3}{\ln(x)}}\right]} = \lim_{x\to 0^+} e^{\left[\frac{-3}{\ln(x)}\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\left[-3\,\frac{\ln(x)-\ln(2)}{\ln(x)}\right]}$$

$$= e^{-3\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1\,\ln(x)-\ln(2)}{1\cdot\ln(x)}\right]} \quad -\infty \quad = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

PER CASA

- $$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}$$

GENERALIZZAZIONE DEI LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 \quad f(x)\to 0$$

NOTAZIONE

$$\left(f(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0\right)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$$

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

RICORDO

$f(x)$ è CONTINUA in $x_0 \in D$ $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x)$ è CONTINUA in (a,b) se è CONTINUA $\forall x \in (a,b)$

$[a,b]$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad e \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS (PER LE FUNZIONI CONTINUE)

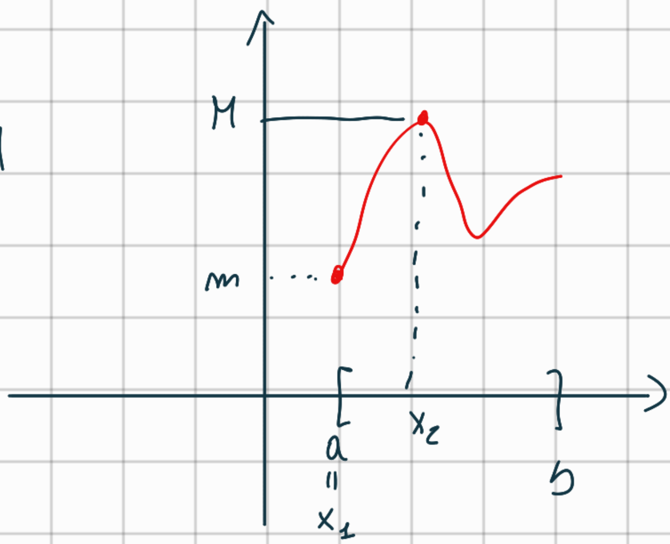
SE f È CONTINUA SU UN intervallo $[a,b]$
- CHIUSO
- LIMITATO

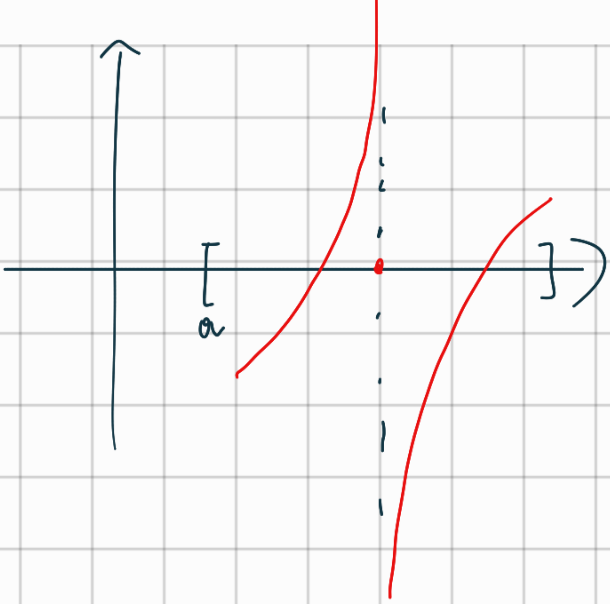
ALLORA $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. $\quad x_2$ P.TO DI MASSIMO ASSOLUTO

x_1 P.TO DI MINIMO ASSOLUTO

CIOÈ

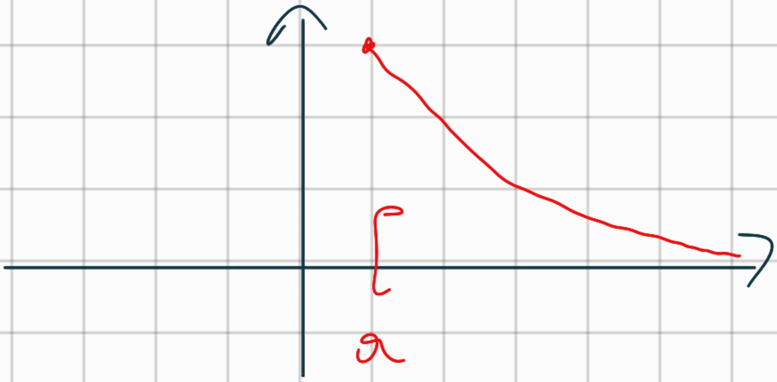
$$m := f(x_1) \leq f(x) \leq f(x) := M$$



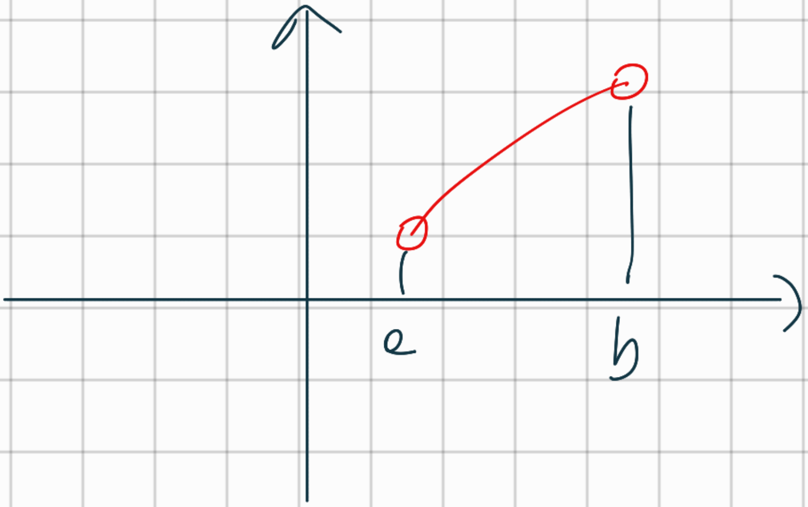


SE f NON È CONTINUA

NON POSSIAMO USARE IL TEOREMA



SE L'INTERVALLO NON È LIMITATO $\exists x_1$



SE L'INTERVALLO NON È CHIUSO $\nexists x_1, x_2$

TEOREMA [DEI VALORI INTERMEDI]

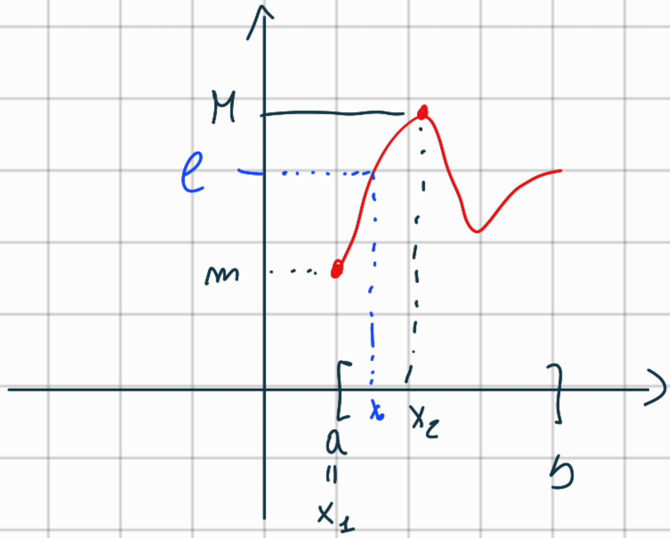
SE f CONTINUA in $[a,b]$ CHIUSO e LIMITATO

ALLORA f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e massimo assoluto.

$$\forall \ell \quad m < \ell < M \quad \exists x_0 \text{ t.c. } f(x_0) = \ell$$

$\forall \ell \quad m < \ell < M$

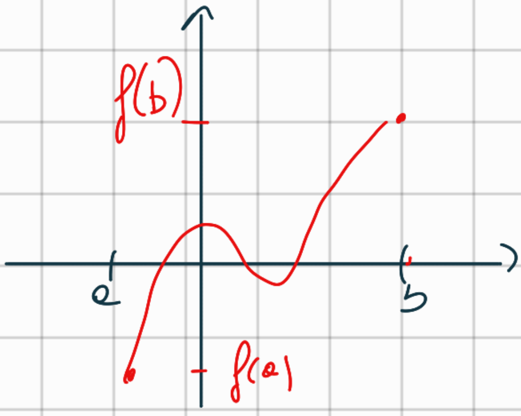
$\exists x_0$ t.c. $f(x_0) = \ell$



TEOREMA [DI ESISTENZA DEGLI ZERI]

- Se f continua in $[a, b]$
- $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto

$\exists x_0$ t.c. $f(x_0) = 0$



ESERCIZI

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) = F.I$$

$\infty \qquad 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \cancel{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{2/x} \cdot \frac{2}{\cancel{x}} = 2$$

0

0

- $\dfrac{\sin(f(x))}{f(x)}$
- $f(x) \longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)} = \frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x - e^x}{x}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x + 1 - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{1-e^x}{x} = \lim_{x\to 0} -\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\to 0} + \lim_{x\to 0} -\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1}$$

$$= -1$$

ASINTOTO OBLIQUO

SI CERCA

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$

$y = mx + q$ e' L'ASINTOTO OBLIQUO

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^2} = \infty$$

∞

∞

CERCO L'AS. OB.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-1}{x^3} = 2 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3-1}{x^2}\right) - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^3}-1 \cancel{-2x^3}}{x^2} = 0 = q$$

⚠ NON METTERE $\frac{f(x)}{x} - mx$

$y = 2x$ È AS. OBLIQUO