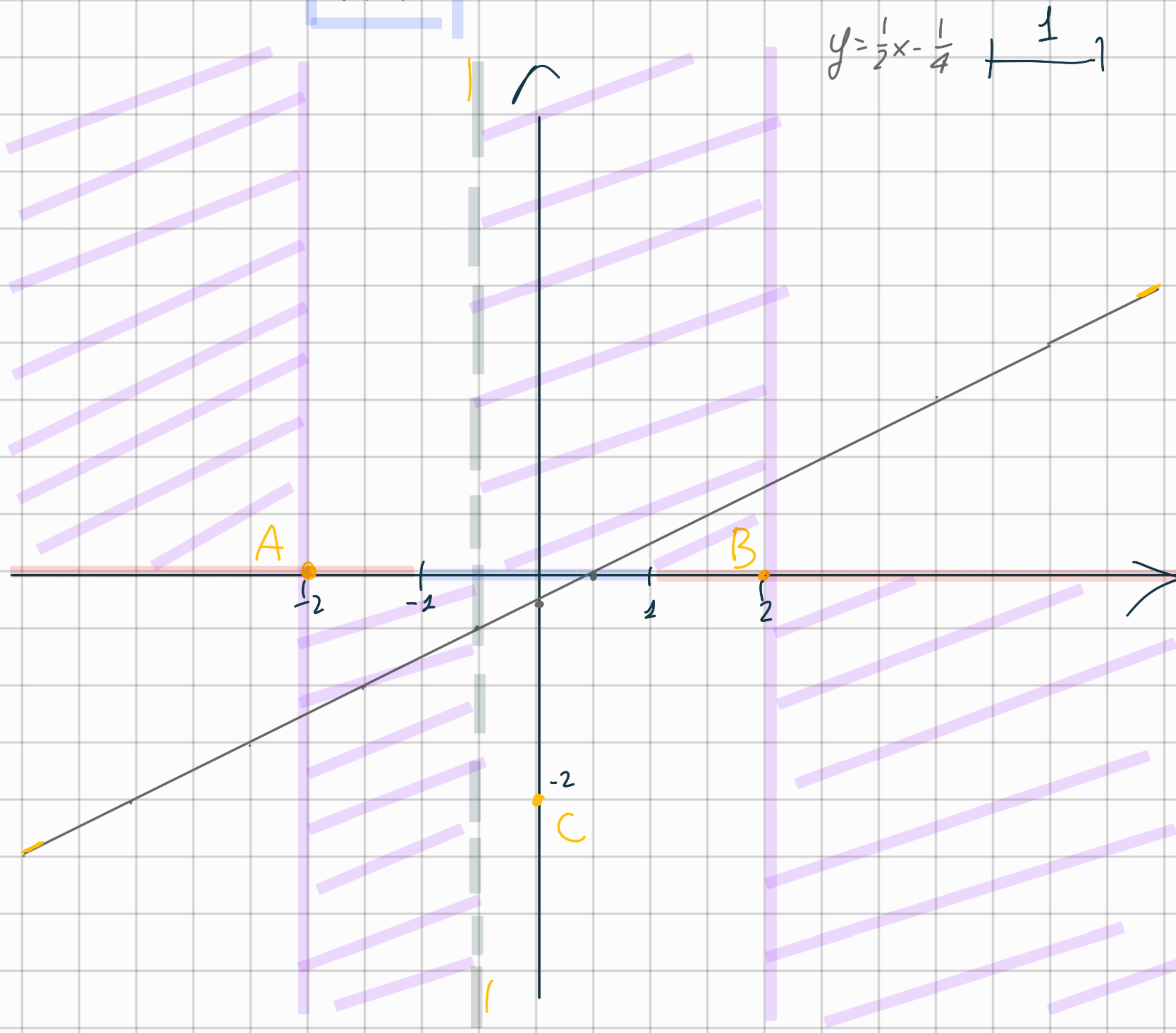
Lezione 16 28/11/23

ESEMPIO DI STUDIO DI FUNZIONE COL V.A.

$$f(x) = \frac{|x^2-1|-3}{2x+1} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-1-3}{2x+1} & \text{se } x^2-1 \geq 0 \\ \dfrac{-x^2+1-3}{2x+1} & \text{se } x^2-1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \boxed{\dfrac{x^2-4}{2x+1}} & x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ \boxed{\dfrac{-x^2-2}{2x+1}} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$



DOMINIO

Per entrambe le regioni delle rette

C.E. $2x+1 \neq 0$

$2x \neq -1$

$x \neq -\frac{1}{2}$

$$D = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Studio del segno

PER $\underline{x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1}$

$$\frac{x^2-4}{2x+1} \geq 0$$

- $x^2 - 4 \geq 0$

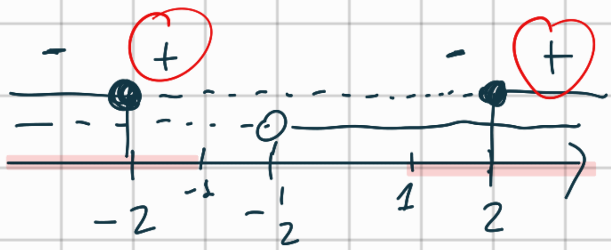
  $x^2 \geq 4$

  $x \leq -2 \ \vee \ x \geq 2$

- $2x+1 > 0$

  $2x > -1$

  $x > -\frac{1}{2}$



LA FUNZIONE SI ANNULLA PER $x = \pm 2$

$A = (-2, 0)$

$B = (2, 0)$

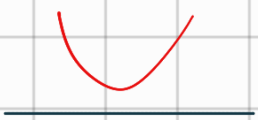
PER $-1 < x < 1$

$$\frac{-x^2-2}{2x+1} \geq 0$$

$-x^2 - 2 \geq 0$

$\boxed{x^2 + 2 < 0}$

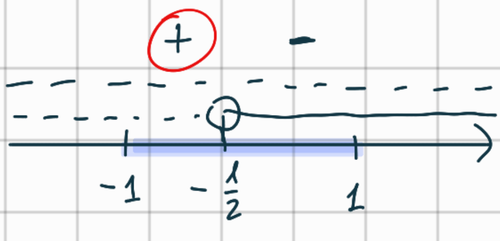
$\Delta = -8 < 0$



$\emptyset$

$2x+1 > 0$

$x > -\frac{1}{2}$



IN QUESTA REGIONE f NON SI ANNULLA MAI

La funzione è POSITIVA PER $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

NEGATIVA PER $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

NULLA PER $x \in \{-2, 2\}$

INTERSEZIONE ASSE y

MODO 1

$$f(0) = \frac{0-2}{2\cdot 0+1} = -2$$

MODO 2

$$f(0) = \frac{|0^2-1|-3}{2\cdot 0+1} = \frac{|-1|-3}{1} = -2$$

$$C = (0, -2)$$

⚠ L'INTERSEZIONE CON L'ASSE Y È UNICA

LIMITI

$$D = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{+\infty}{x^2-4}}{\underset{-\infty}{2x+1}} = \frac{\infty}{\infty} = F.I$$

METTO LA FUNZIONE "ROSSA" PERCHÉ A $-\infty$ SIAMO NEI PUNTI $x \leq -1$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{+\infty}{x^2-4}}{\underset{-\infty}{2x+1}} = -\infty$$

IN QUANTO IL NUM. È DI ORDINE SUPERIORE

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2-4}{2x+1}\cdot\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{2x^2+x} = \frac{1}{2} = m$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{2x+1} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x^2-4)-(2x+1)x}{2(2x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2x^2}-8-\cancel{2x^2}-x}{4x+2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-8}{4x+2} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{2x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{2x^2+x} = \frac{1}{2} = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x-8}{4x+2} = -\frac{1}{4}$$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$ È ASINTOTO OBLIQUO (COMPLETO)

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} \frac{-x^2-2}{2x+1} = \frac{\ominus}{0^-} = +\infty$$

$$-\left(\frac{1}{4}\right)-2 = \ominus$$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{2}^-\right)+1$$

$$-1^- + 1$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{-x^2-2}{2x+1} = \frac{\ominus}{0^+} = -\infty$$

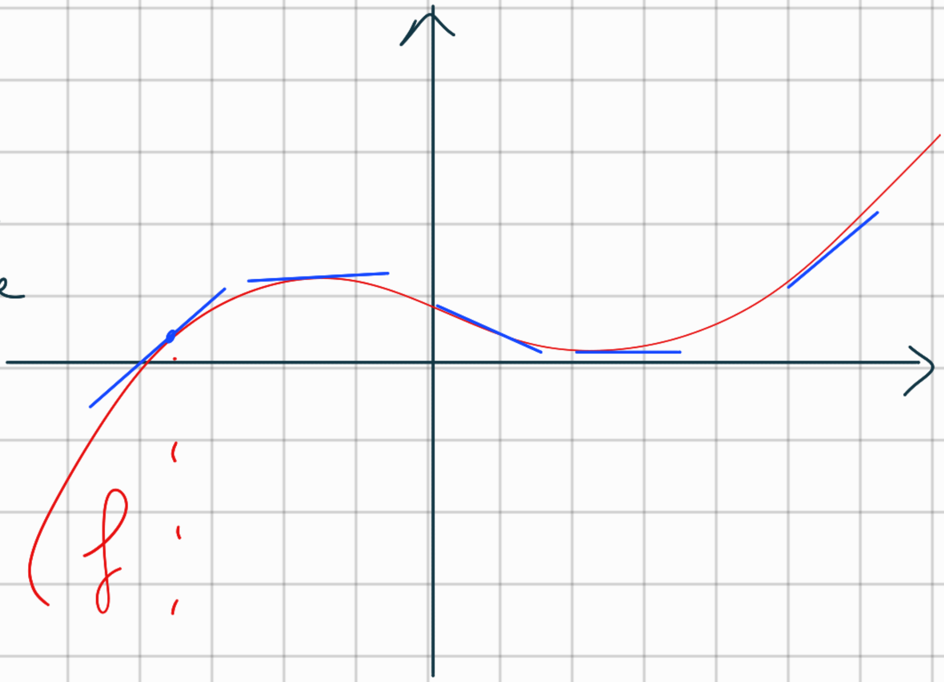
METTO LA FUNZIONE "BLU" POICHÉ $-\frac{1}{2} \in (-1,1)$

$x = \frac{1}{2}$ È UN ASINTOTO VERTICALE (COMPLETO)

LA DERIVATA $\quad f: D \to \mathbb{R}$

È UNO STRUMENTO CHE SERVE PER STUDIARE DOVE UNA FUNZIONE CRESCE/DECRESCE

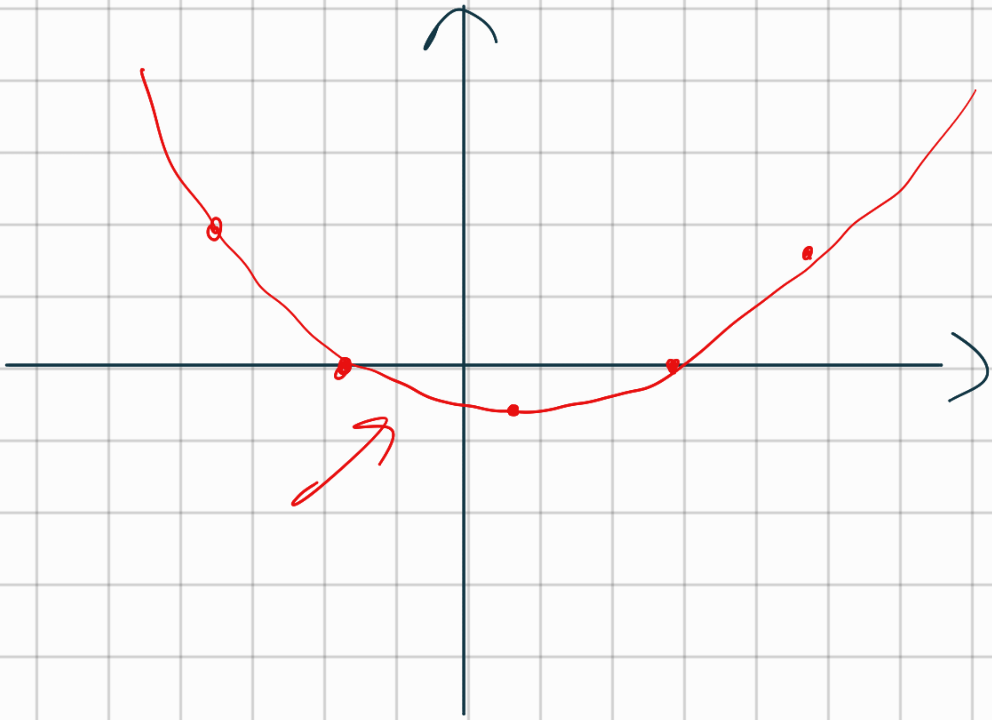
Per fare questo studio si controlla l'inclinazione (il coeff. angolare) della retta tangente alla funzione in un punto.



f CRESCENTE
DERIVATA POSITIVA

f PIATTA
DERIVATA NULLA

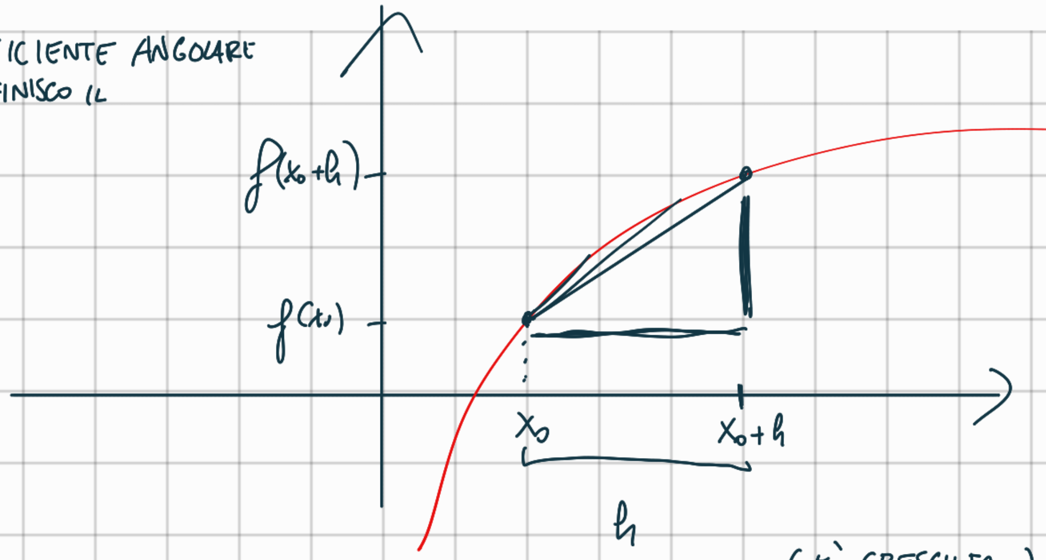
f DECRESCENTE
DERIVATA NEGATIVA



PER TROVARE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE DEFINISCO IL

RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



h è DETTO INCREMENTO

(È CRESCIUTA O DECRESCIUTA)

IL RAPPORTO INCREMENTALE DICE QUANTO LA FUNZIONE È VARIATA IN UN DETERMINATO INCREMENTO DELLA VARIABILE x.

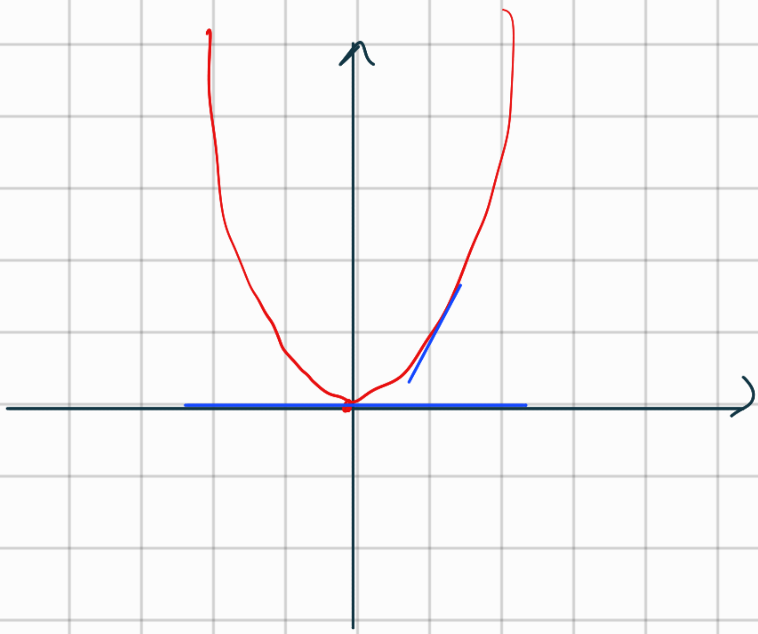
DEFINIZIONE

Sia $x_0 \in D$ UNA FUNZIONE, f SI DICE DERIVABILE SE ESISTE FINITO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE PER $h \to 0$, TALE LIMITE SI INDICA CON $f'(x_0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} := f'(x_0)$$

UNA FUNZIONE f È DERIVABILE IN (a,b) SE È DERIVABILE $\forall x \in (a,b)$

ESEMPIO $f(x)=x^2$



CALCOLO $f'(0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

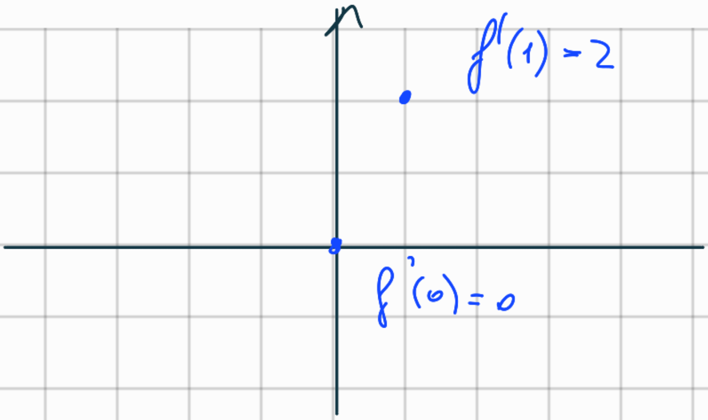
$$\lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}}-0}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

$x_0 = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 \cancel{-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = 2$$



PER CASA $\quad x_0 = -1$

$$\boxed{f(x) = x^3 \qquad x_0 = \pm 1, 0}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ DERIVATA SINISTRA

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ DERIVATA DESTRA

f è DERIVABILE IN x_0 $\Leftrightarrow$ ESISTONO FINITI E COINCIDONO $\boxed{f'_+(x_0) = f'_-(x_0)}$

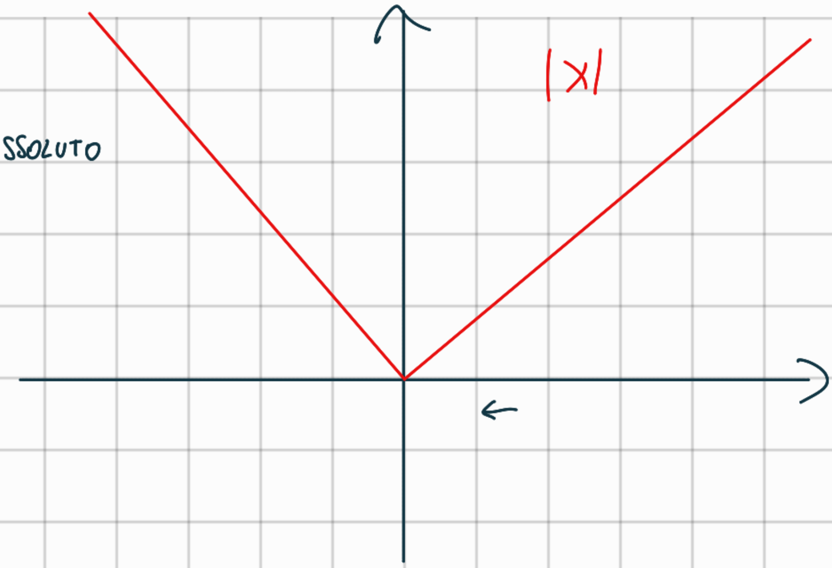
TEOREMA

SE f è DERIVABILE in x_0 $\Rightarrow$ f è CONTINUA in x_0

$$\not\Leftarrow$$

NON VALE IL VICEVERSA

MOSTRIAMO L'ESEMPIO DEL VALORE ASSOLUTO



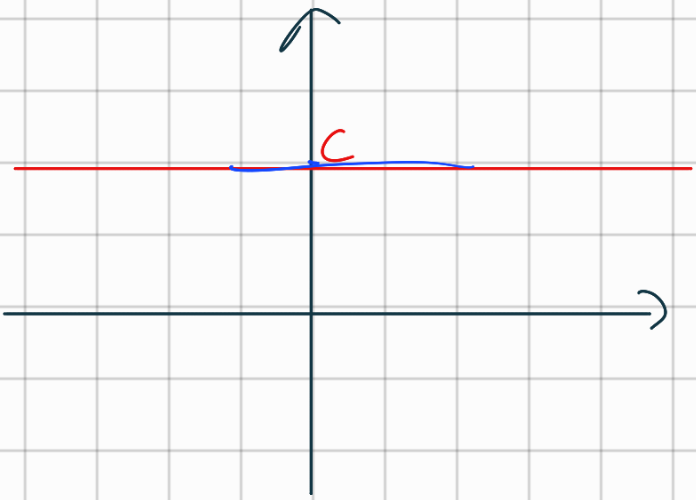
$f'_+(0) = 1$

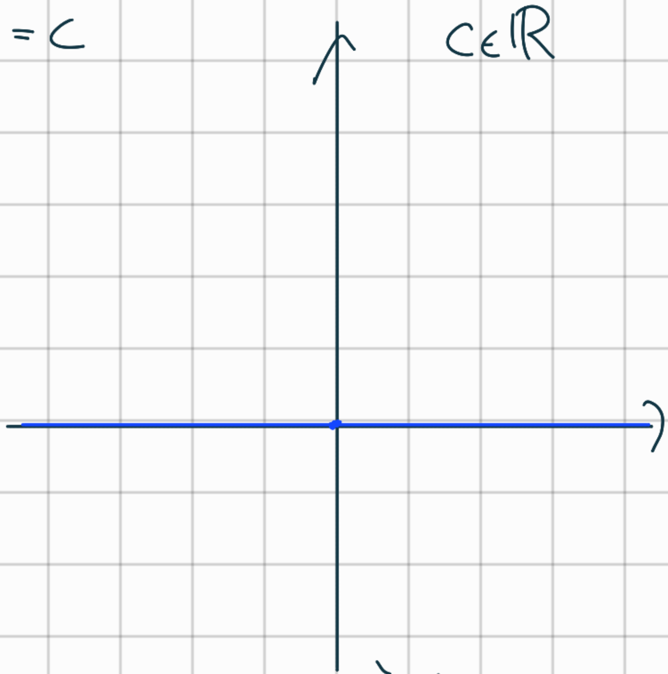
$f'_-(0) = -1$

È CONTINUA $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- FUNZIONE COSTANTE $f(x) = c$ $\quad c \in \mathbb{R}$





LA DERIVATA DELLA FUNZIONE COSTANTE È LA FUNZIONE COSTANTE NULLA

$f'(x) = 0 \quad \forall x$

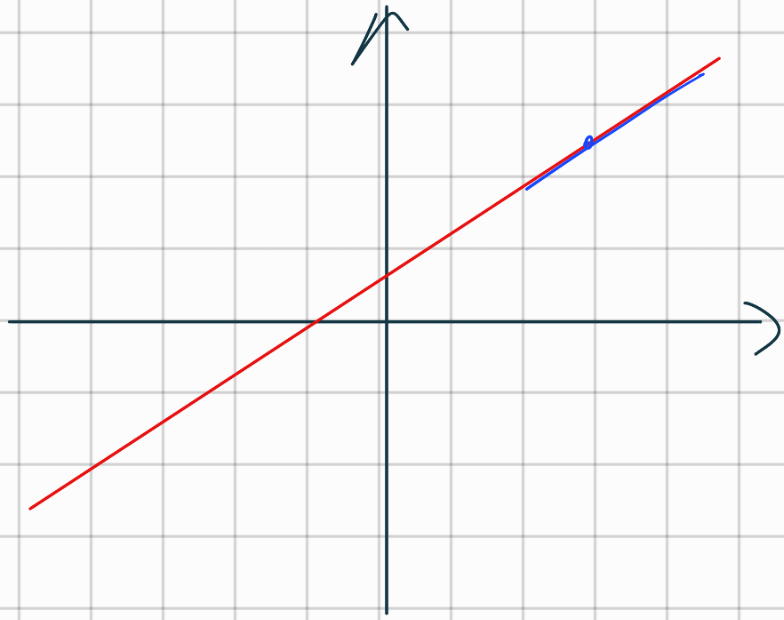
DIM

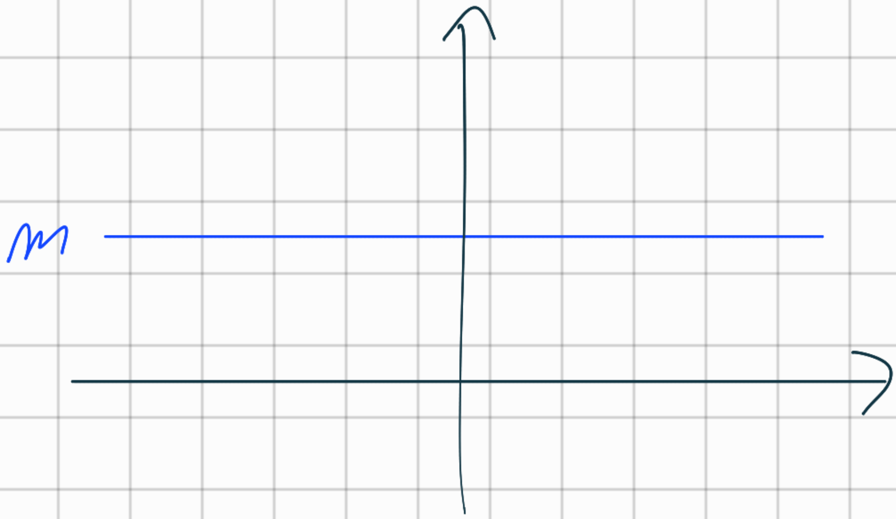
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{c} - \cancel{c}}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

RETTA

$$f(x) = \underset{\uparrow}{m}x + q$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\cancel{mx_0}+mh+\cancel{q}}^{m(x_0+h)+q}\ \overbrace{-\cancel{mx_0}-\cancel{q}}^{-(mx_0+q)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{m\cancel{h}}{\cancel{h}} = m$$





DERIVATA DELLA POTENZA

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

NOTA:
Queste formule vale anche per esponenti negativi e frazionari
ES. $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$, $\sqrt[k]{x^m} = x^{\frac{m}{k}}$

$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

DERIVATA DELL' ESPONENZIALE $a > 0$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln(a) a^x$$

CASO PARTICOLARE $a = e$ $\quad f'(x) = \ln(e) e^x = e^x$

DERIVATA DEL LOGARITMO

$$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \log_a(e) \frac{1}{x}$$

CASO PARTICOLARE
$f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

DERIVATA DI $\sin x$ $\cos x$

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = \underline{-\sin(x)}$$

PROPRIETÀ DELLE DERIVATE

- $$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$ DERIVATA DELLA SOMMA

$\alpha \in \mathbb{R}$

- $$[\alpha f(x)]' = \alpha f'(x)$$ DERIVATA DEL PRODOTTO PER UNA COSTANTE

ESEMPIO POLINOMI

$$f(x) = 7x^4 - 2x^2 + 3$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = 7(4x^3) - 2(2x) = 28x^3 - 4x$$

- DERIVATA DEL PRODOTTO

$$\boxed{[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

ESEMPIO

$$f(x) = x^2 \cos x = 2x\cos x + x^2(-\sin x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$$

DERIVATA DEL RAPPORTO

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$ se $g(x) \neq 0$

$$f(x) = tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

EQ. FONDAM.
DELLA TRIGONOMETRIA

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

PER CASA

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\boxed{\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

ESEMPIO

$$h(x) = \cos^2 x = [\cos x]^2$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g(x) = \cos x$$

$$h'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cos x \left(= 2\sin(2x) \right)$$