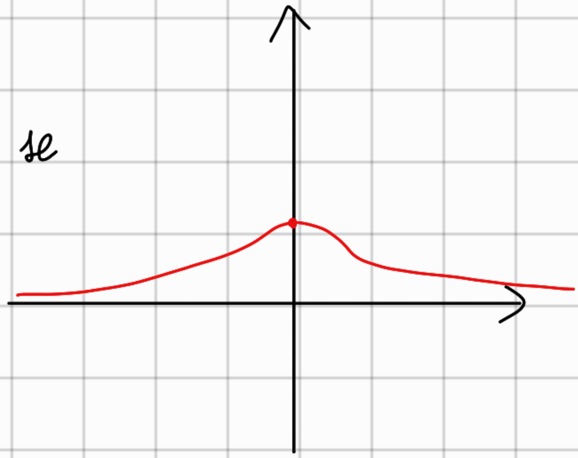
Lezione 18 04/12/23

DEFINIZIONE

$x_0 \in D$ è P.TO di (MINIMO) MASSIMO ASSOLUTO se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$$
$(\leq)$

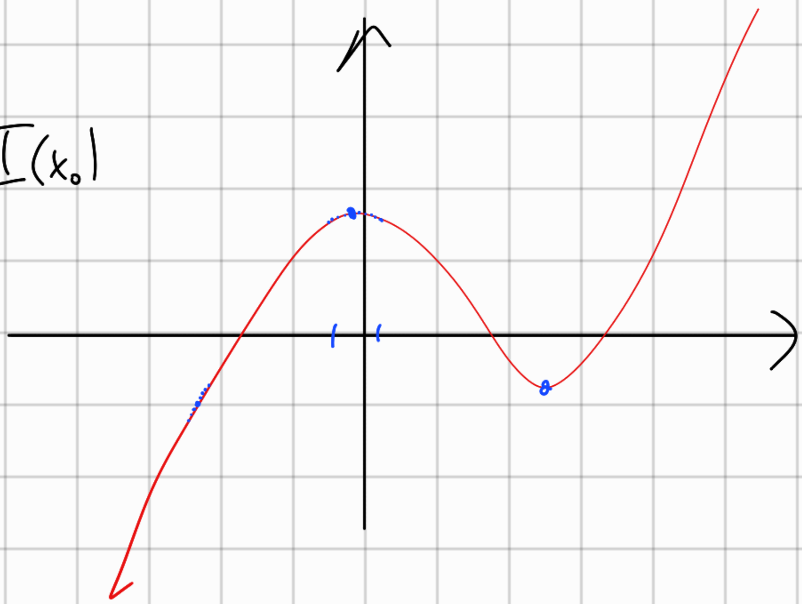


PER QUESTA FUNZIONE
0 È P.TO DI MAX ASSOLUTO

DEFINIZIONE

$x_0 \in D$ si dice P.TO DI (MINIMO) MASSIMO RELATIVO se $\exists\, I(x_0)$ t.c.

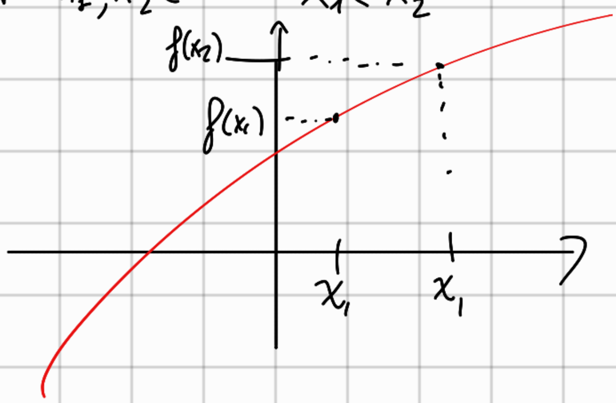
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I(x_0)$$
$(\leq)$



DEFINIZIONE (DECRESCENTE)

$f(x)$ si dice CRESCENTE in I se $\forall\ x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2$

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$
$(\geq)$



DEFINIZIONE

$f(x)$ si dice STRETTAMENTE CRESCENTE (DECRESCENTE) in I se $\forall\ x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (>)$$

PROPOSIZIONE

Si ha UN MASSIMO (MINIMO) RELATIVO QUANDO LA FUNZIONE È CRESCENTE (DECRESCENTE) A SINISTRA DI x_0 E DECRESCENTE (CRESCENTE) A DESTRA DI x_0.

DEFINIZIONE

x_0 si dice STAZIONARIO se f è DERIVABILE in x_0 e $f'(x_0) = 0$

TEOREMA

Se
- x_0 MAX o MIN RELATIVO
- f è DERIVABILE in x_0

$\Rightarrow$ x_0 È STAZIONARIO

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi x_0 è P.TO di MAX RELATIVO

$$\Downarrow$$

$$\exists\, I(x_0) \quad t.c. \quad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I(x_0)$$

$$\downarrow$$

$$f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$$

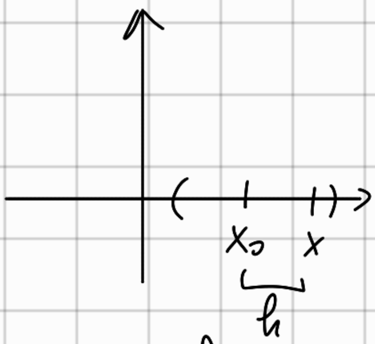
SE CONSIDERO $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\underline{f(x_0+h) - f(x_0) < 0}$$

$$f(x_0) - f(x) \geq 0$$

$$-f(x_0) + f(x) \leq 0$$

$$f(x) - f(x_0) \leq 0$$



$$x = x_0 + h$$

$\ominus \ominus = \oplus$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{<0}}{\underbrace{h}_{<0}} = f'(x_0) \geq 0$$

PER IPOTESI f È DERIVABILE IN x_0

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{<0}}{\underbrace{h}_{>0}} = f'(x_0) \leq 0$$

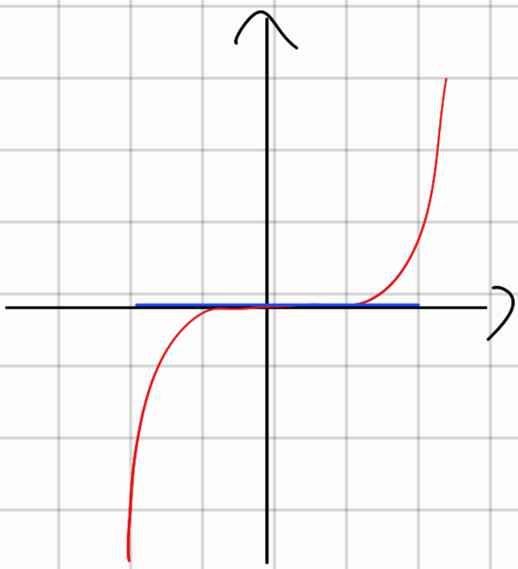
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\downarrow$

x_0 È STAZIONARIO

$\square$

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ x_0 SIA P.TO DI MAX O MIN RELATIVO IN CUI f È DERIVABILE È CHE x_0 SIA STAZIONARIO



P.TO DI FLESSO ORIZZONTALE

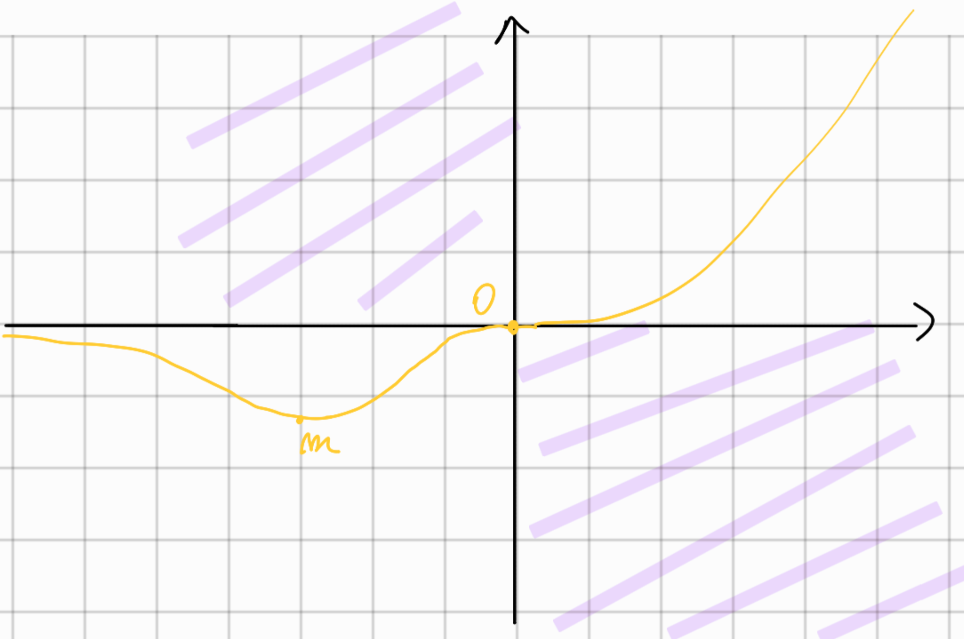
È un p.to stazionario MA NON MAX NÉ MIN

POICHÉ ESISTONO I FLESSI ORIZZONTALI LA CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE

ESERCIZIO

$$f(x) = e^x x^3$$

$$D = \mathbb{R}$$



STUDIO DEL SEGNO

$$f(x) \geq 0$$

$$e^x x^3 \geq 0$$

$$e^x \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{R}$$

NON SI ANNULLA MAI

$$x^3 \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{0}$$

$$x \geq 0$$

SI ANNULLA PER $x=0$

$$O = (0,0)$$

↳ è l'unica intersezione sia con l'asse x che con l'asse y

LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\substack{\downarrow\\0}}{e^x}\ \underset{\substack{\downarrow\\-\infty}}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\infty}{x^3}}{\underset{\infty}{e^{-x}}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{e^x}\ \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x^3} = +\infty$$

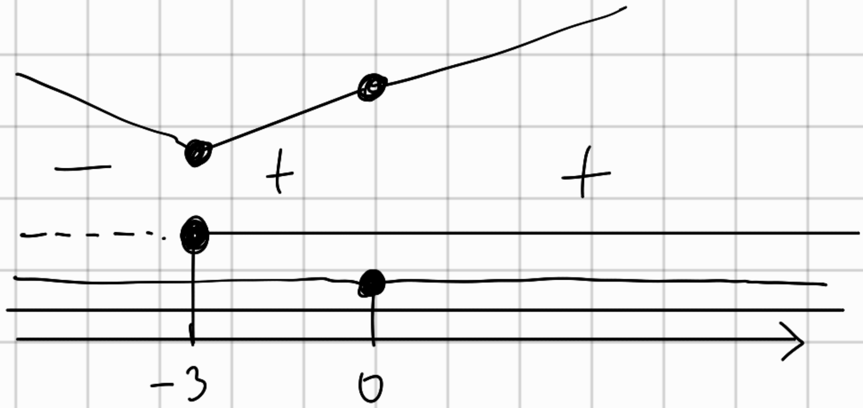
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = e^x x^3 + e^x(3x^2) = e^x(x^3+3x^2) = e^x x^2 (x+3)$$

$D_{f'} = \mathbb{R}$ NON CI SONO PUNTI DI NON DERIVABILITA'

$f'(x) \geq 0$

$e^x > 0$ $\mathbb{R}$	$x^2 \geq 0$ $\mathbb{R}$ SI ANNULLA PER $x=0$	$x+3 \geq 0$ $x \geq -3$ SI ANNULLA PER $x=-3$



La funzione è DECRESCENTE in $(-\infty, -3)$

STRETT. CRESCENTE IN $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$

PRESENTA UN P.TO DI MINIMO IN $x = -3$

PRESENTA UN FLESSO ORIZZONTALE IN $x = 0$

$$f(-3) = e^{-3}(-3)^3 = -\frac{27}{e^3} \simeq 1.34$$

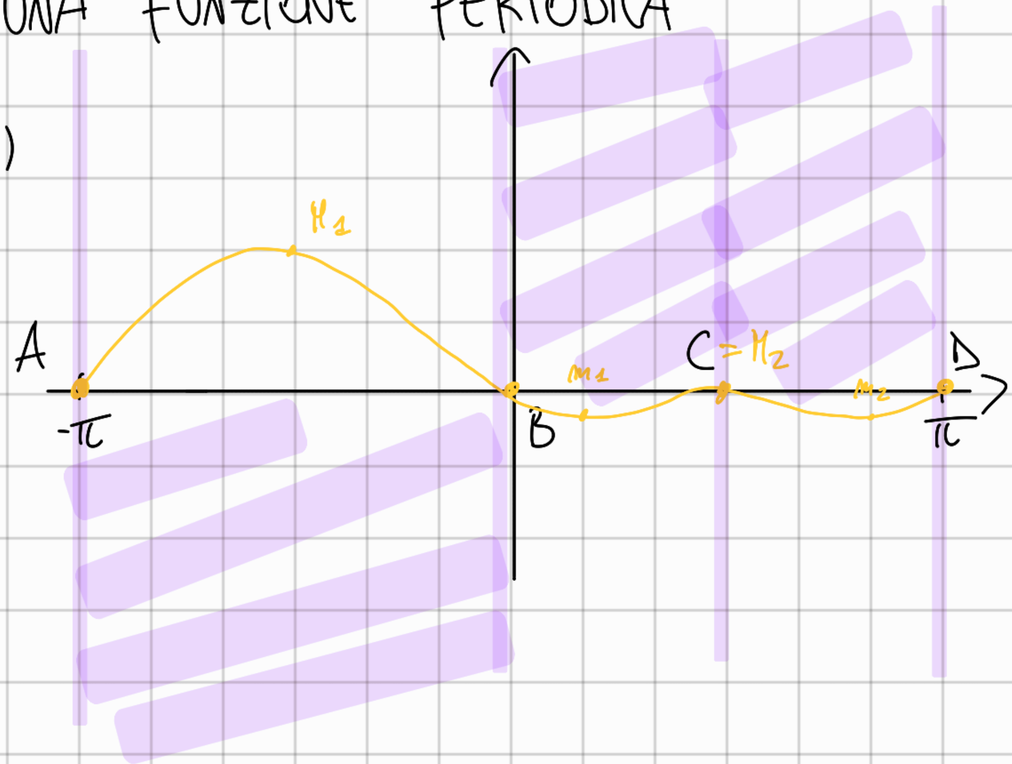
$m = \left(-3, -\frac{27}{e^3}\right) \rightarrow$ MINIMO

$O = (0,0) \rightarrow$ FLESSO ORIZZONTALE

STUDIO DI UNA FUNZIONE PERIODICA

$$f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$$

$x \in [-\pi, \pi]$



$D = [-\pi, \pi]$

STUDIO DEL SEGNO

$$f(x) \geq 0$$

$$\sin(x)(\sin x - 1) \geq 0$$

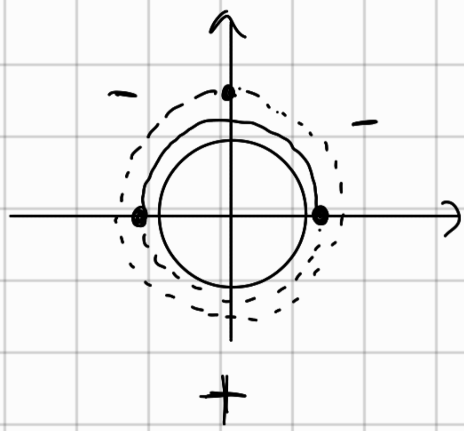
$\sin x \geq 0$

$x \in [0, \pi]$

$\sin x - 1 \geq 0$

$\sin x \geq 1$

$x = \frac{\pi}{2}$



La funzione è POSITIVA in $(-\pi, 0)$

NEGATIVA in $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

NULLA in $\{-\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

$A = (-\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$

$B = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

$C = (\frac{\pi}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$

$D = (\pi, 0) \in \mathbb{R}$

DOVREMMO STUDIARE I LIMITI AI CONFINI DEL DOMINIO $-\pi^+, \pi^-$

$$\lim_{x \to -\pi^+} \sin^2(x) - \sin x = 0 \qquad \lim_{x \to \pi^-} \sin^2(x) - \sin(x) = 0$$

PUNTI GIÀ TROVATI

DERIVATA PRIMA $f(x) = [\sin(x)]^2 - \sin(x)$

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos x - \cos x = (2\sin x - 1)\cos x$$

$$f'(x) \geq 0$$

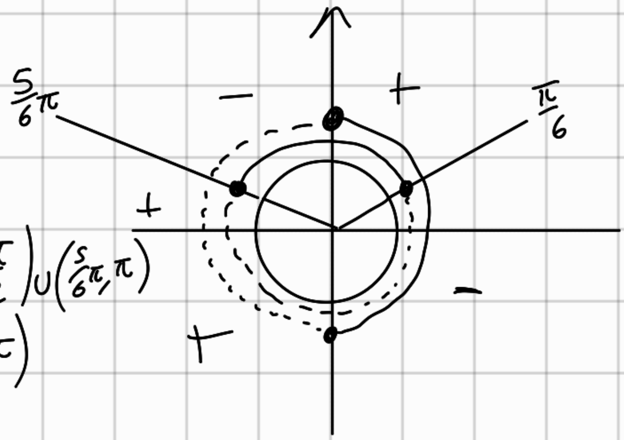
$$(2\sin x - 1)\cos x \geq 0$$

$2\sin x - 1 \geq 0$ $\qquad$ $\cos x \geq 0$

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\downarrow$

$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

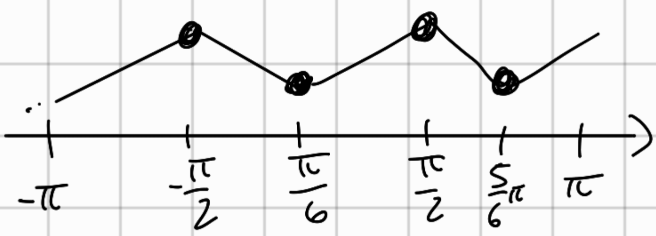


f è CRESCENTE in $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$

DECRESCENTE in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right)$

$M_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$
$M_2 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = C$ MASSIMI

$m_1 = \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$
$m_2 = \left(\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{4}\right)$ MINIMI



$$\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$