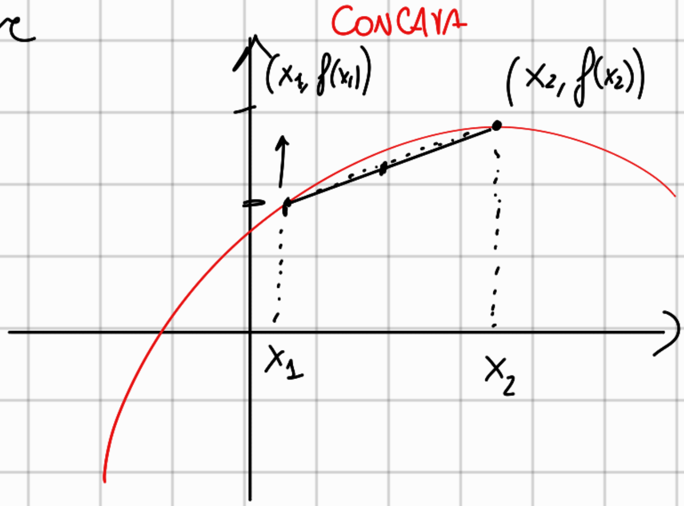
Lezione 19

05/12/23

DEFINIZIONE (CONVESSA)

$f(x)$ SI DICE CONCAVA in un intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2$, il segmento che unisce $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sotto della funzione
al di sopra



$\forall t \in [0,1]$

$$f(\underbrace{t x_1 + (1-t) x_2}) \geq \, (\leq) \, t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

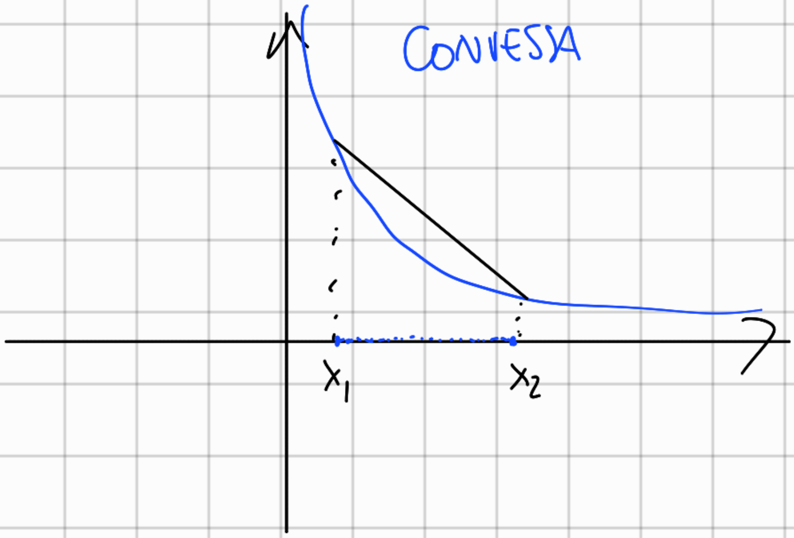
$t x_1 + (1-t) x_2$

$t = 0 \quad x_2$

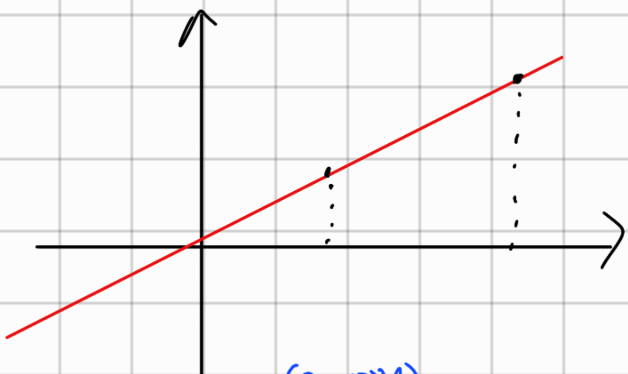
$t = \frac{1}{2}$

$t = 1 \quad x_1$

$$\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



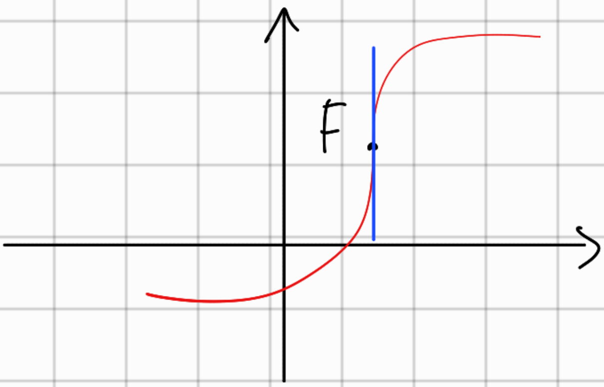
QUESTA FUNZIONE (LA RETTA) E' SIA CONCAVA CHE CONVESSA

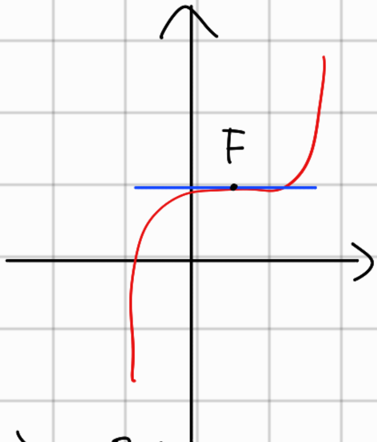


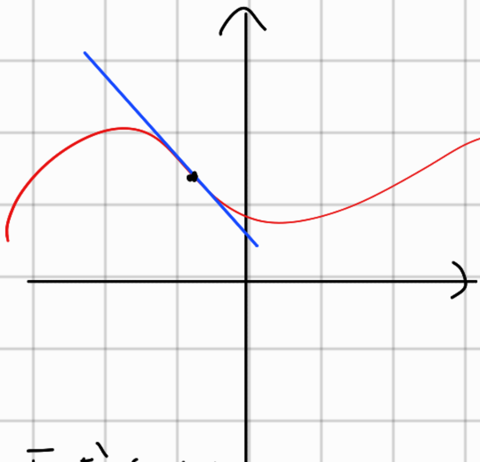
Si può definire UNA FUNZIONE STRETTAMENTE CONCAVA (CONVESSA) $\forall x_1 < x_2$
$\forall t \in [0,1]$

$$f(t x_1 + (1-t) x_2) > \, (<) \, t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

Un punto in cui una funzione è CONCAVA A SINISTRA e CONVESSA DESTRA o VICEVERSA è detto PUNTO DI FLESSO







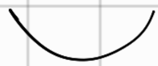
F è UN P.TO DI FLESSO VERTICALE

F è UN PUNTO DI FLESSO ORIZZONTALE

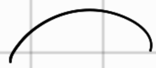
F È UN P.TO DI FLESSO OBLIQUO

TEOREMA

Se $f''(x) > 0$ $\quad f$ è STRETTAMENTE CONVESSA



$f''(x) < 0$ $\quad f$ è STRETTAMENTE CONCAVA



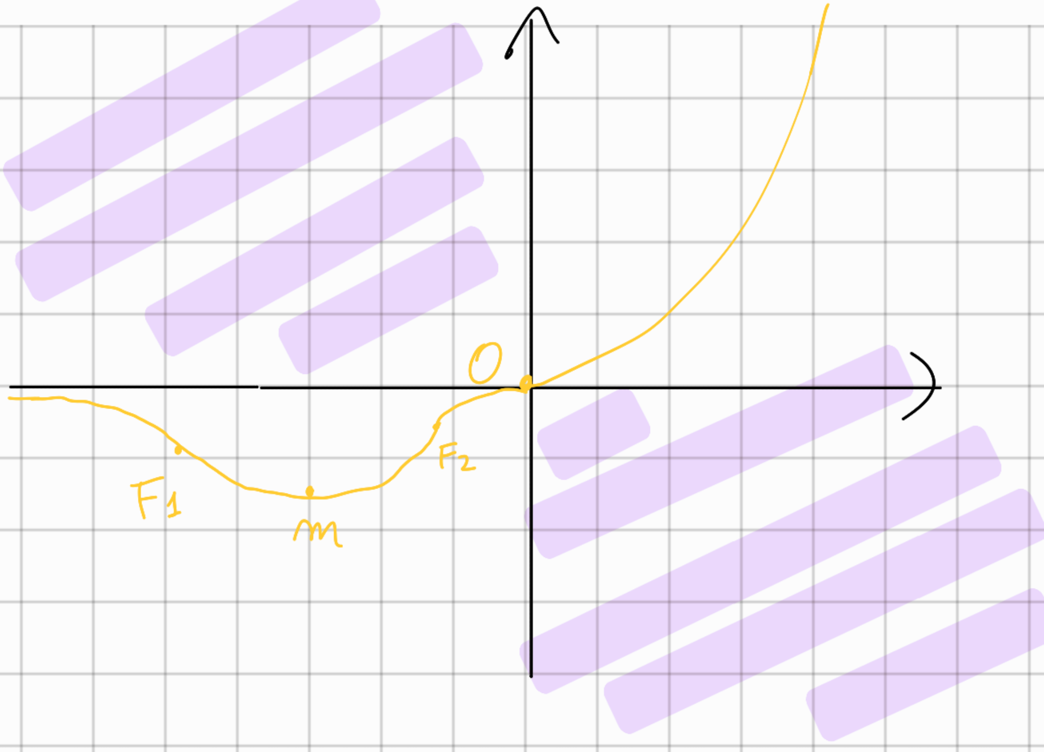
(PER $f''(x) = 0$ CERCHEREMO I PUNTI DI FLESSO)

ESERCIZIO DI IERI

$$f(x) = e^x x^3 \rightarrow f'(x) = e^x (x^3 + 3x^2)$$

$$e^x x^3 + e^x (3x^2)$$

$$f''(x) = e^x (x^3 + 3x^2) + e^x (3x^2 + 6x) = e^x (x^3 + 6x^2 + 6x) = e^x x (x^2 + 6x + 6)$$



$$e^x x(x^2+6x+6) \geq 0$$

$e^x \geq 0$

$\mathbb{R}$

NON SI ANNULLA MAI

$x \geq 0$

$[0,+\infty)$

SI ANNULLA PER $x=0$

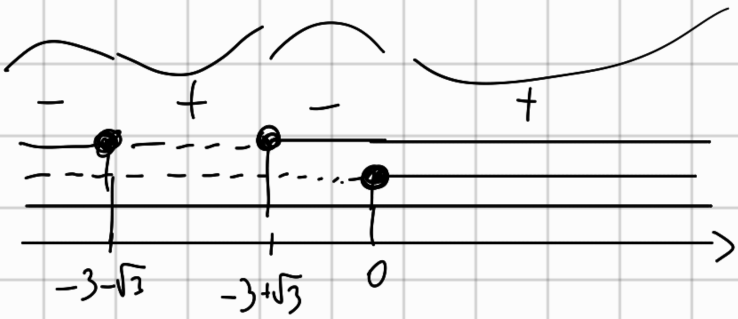
$x^2+6x+6 \geq 0$

$\Delta = 36-24=12$

$\sqrt{12} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{2} \qquad x_1 = -3-\sqrt{3} \qquad x_2 = -3+\sqrt{3}$$

$$(-\infty, -3-\sqrt{3}) \cup (-3+\sqrt{3}, +\infty)$$



La funzione è CONCAVA PER $x \in (-\infty, -3-\sqrt{3}) \cup (-3+\sqrt{3}, 0)$

CONVESSA PER $x \in (-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}) \cup (0, +\infty)$

PRESENTA TRE PUNTI DI FLESSO

$F_1 = \left(-3-\sqrt{3},\ e^{-3-\sqrt{3}}(-3-\sqrt{3})^3\right) \simeq (-4.7, -0.9)$

$F_2 = \left(-3+\sqrt{3},\ e^{-3+\sqrt{3}}(-3+\sqrt{3})^2\right) \simeq (-1.26, -0.57)$

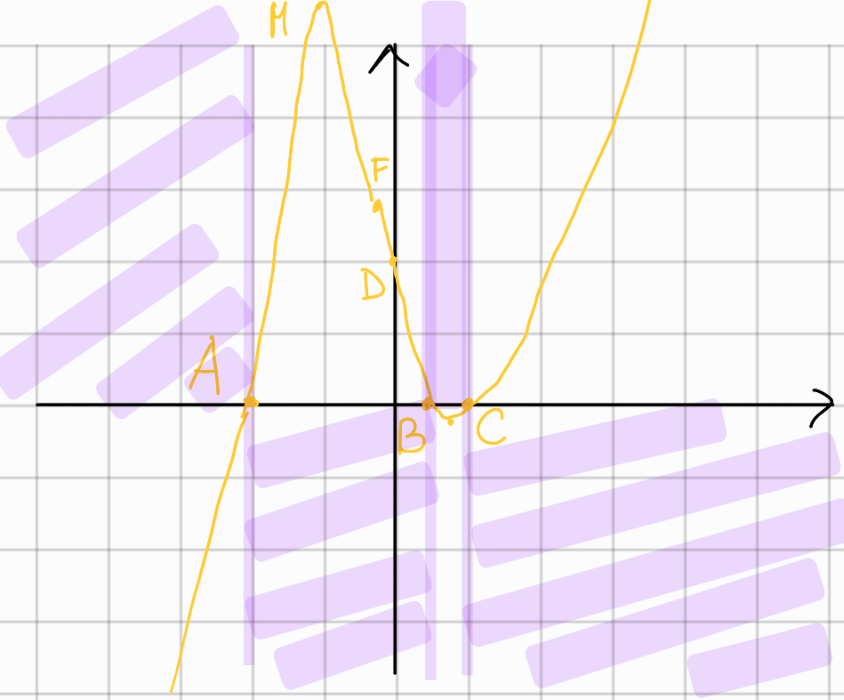
$O = (0,0)$

FLESSO ORIZZONTALE

ESERCIZIO

1 È SOLUZIONE
$2+1-5+2$

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$
$= (x-1)(2x^2+3x-2)$ DEVO PROVARE $\pm 1 \;\; \pm 2 \;\; \pm\frac{1}{2}$
$= (x-1)(x+2)(2x-1)$



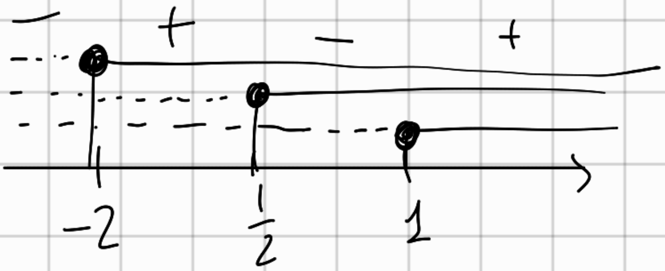
$D = \mathbb{R}$

- STUDIO DEL SEGNO

$f(x) \geq 0$
$(x-1)(x+2)(2x-1) \geq 0$

$x-1 \geq 0$	$x+2 \geq 0$	$2x-1 \geq 0$
$x \geq 1$	$x \geq -2$	$x \geq \frac{1}{2}$

	2	1	-5	2
1		2	3	-2
	2	3	-2	/
-2		-4	2	
	2	-1	/	



La funzione è NEGATIVA PER $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

POSITIVA PER $(-2, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

NULLA PER $\{-2, \frac{1}{2}, 1\}$

$A = (-2, 0)$
$B = (\frac{1}{2}, 0)$
$C = (1, 0)$

INTERSEZIONE ASSE Y

$D = (0, f(0)) = (0, 2)$

LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3+x^2-5x+2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-5x+2 = +\infty$$

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = 6x^2+2x-5$$

$f'(x) \geq 0$ $\qquad$ $124 = 4\cdot 31$

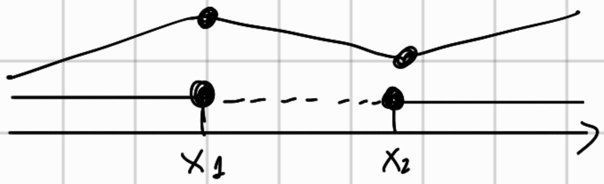
$$6x^2+2x-5 \geq 0$$

$$\Delta = 4+120 = 124 = 4\cdot 31$$

$$x_{12} = \frac{-2\pm 2\sqrt{31}}{12}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{31}}{6} \simeq -1.09$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{31}}{6} \simeq 0.76$$



P.TO DI MASSIMO

$$M = (x_1, f(x_1)) \simeq (-1.09, 6.04)$$

P.TO DI MINIMO

$$m\,(x_2, f(x_2)) \simeq (0.76, -0.34)$$

LA FUNZIONE È CRESCENTE per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

DECRESCENTE per $x \in (x_1, x_2)$

DERIVATA SECONDA

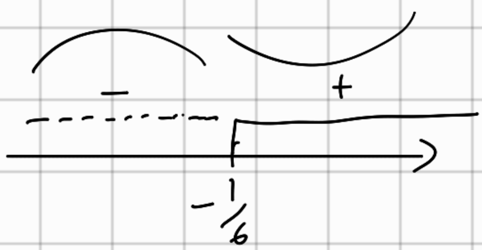
$$f''(x) = 12x+2$$

$$f''(x) \geq 0$$

$$12x+2 \geq 0$$

$$12x \geq -2$$

$$x \geq -\frac{1}{6}$$

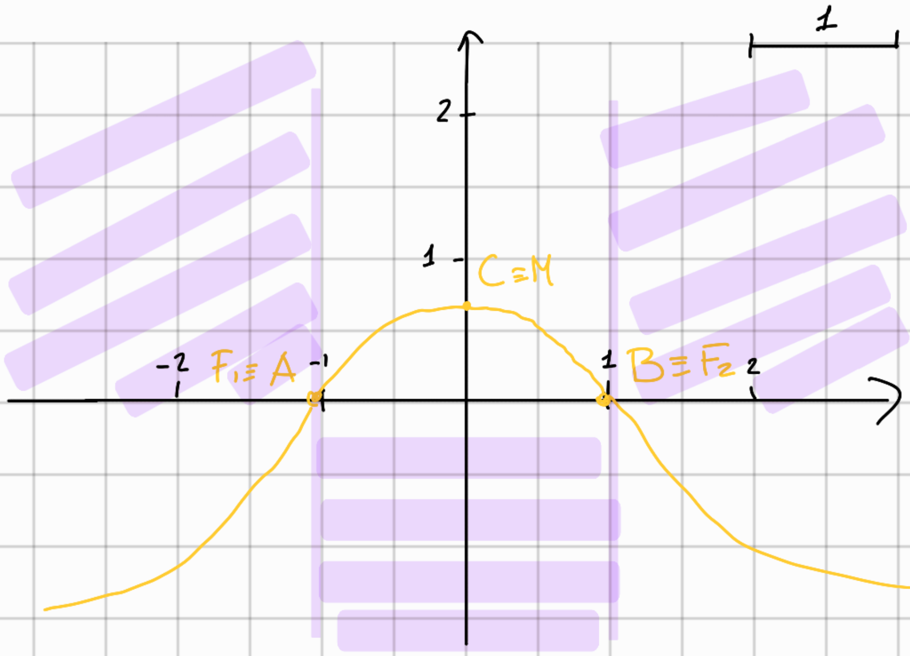


f è CONCAVA per $x \in (-\infty, -\frac{1}{6})$

f è CONVESSA per $x \in (-\frac{1}{6}, +\infty)$

f PRESENTA UN P.TO DI FLESSO $x = -\frac{1}{6}$ $\qquad$ $F = (-\frac{1}{6}, f(-\frac{1}{6})) \simeq (0.17, 2.85)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$$



C.E. $\begin{cases} x^2+1 \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{2}{x^2+1} > 0 \Rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

$$D = \mathbb{R}$$

STUDIO DEL SEGNO

$$\ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right) \geq 0$$

$e^{\ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right)}$ $\qquad$ e^0

$$\frac{2}{x^2+1} \geq 1$$

SI PUÒ FARE SOLO QUANDO SIAMO CERTI CHE $x^2+1 > 0$

$$2 \geq x^2+1$$

$$0 \geq x^2 - 1$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$A = (-1, 0)$

$B = (1, 0)$

La funzione è

POSITIVA per $x \in (-1, 1)$

NEGATIVA per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

NULLA per $x \in \{-1, 1\}$

INTERSEZIONE ASSE Y

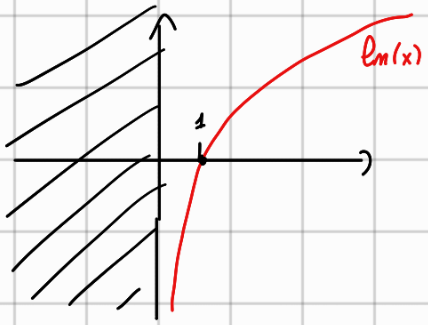
$$\ln\left(\frac{2}{0+1}\right) = \ln(2)$$

$$C = (0, \ln 2) \simeq (0, 0.69)$$

LIMITI

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \ln\left(\frac{2}{+\infty}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \ln\left(\frac{2}{+\infty}\right) = -\infty$$



DERIVATA PRIMA $\qquad f(x) = \ln\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{\frac{2}{x^2+1}}} \cdot \frac{-\overset{2}{\cancel{4}}x}{(x^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{-2x}{x^2+1}$$

$f'(x) \geq 0 \qquad \frac{-2x}{x^2+1} \geq 0$

$-2x \geq 0$

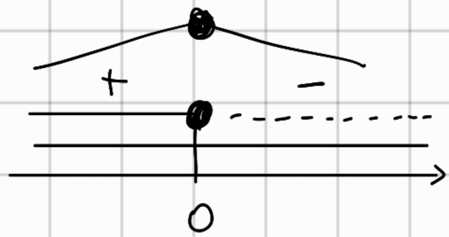
$x \leq 0$

SI ANNULLA PER

$x = 0$

$x^2+1 \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$



La funzione è CRESCENTE per $x \in (-\infty, 0)$

DECRESCENTE per $x \in (0, +\infty)$

PRESENTA UN P.TO DI MASSIMO PER $X=0$

$$M = C = (0, \ln(2))$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)-(-2x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) \geq 0 \qquad \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

$2x^2-2 \geq 0$

$2x^2 \geq 2$

$x^2 \geq 1$

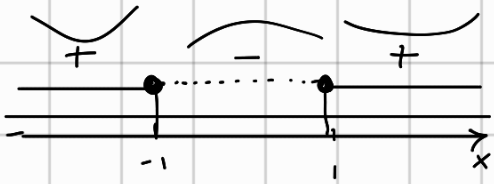
$x \in (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$

SI ANNULLA PER

$x = \pm 1$

$(x^2+1)^2 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$



La funzione è CONVESSA per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
CONCAVA per $x \in (-1, 1)$

Presenta due punti di flesso per $x = -1$ e $x = +1$

$$F_1 \equiv A = (-1, 0)$$
$$F_2 \equiv B = (1, 0)$$