Lezione 20

11/12/2023

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{e^x}}$$

C.E.

$$\begin{cases} e^x \neq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{x^2-4}{e^x} \geq 0 \end{cases}$$

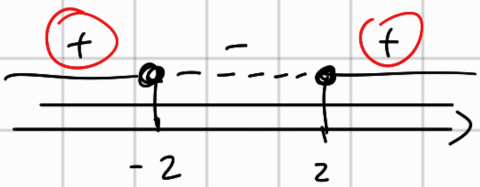
$$D = (-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$$

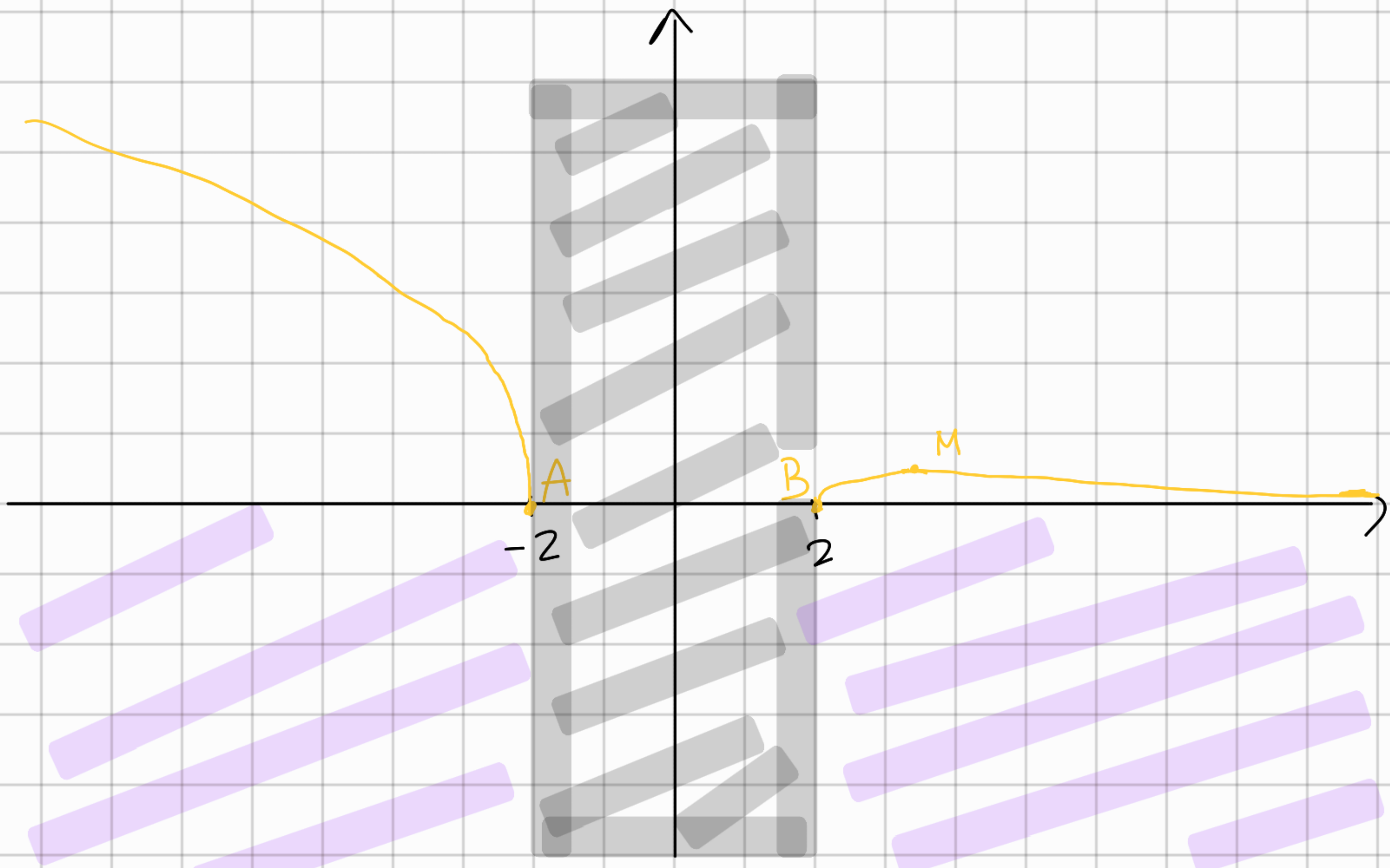
$x^2-4 \geq 0$

$x \leq -2 \vee x \geq 2$

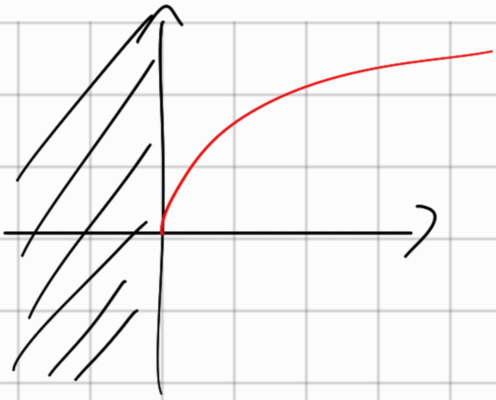
$e^x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$





STUDIO DEL SEGNO



$$\sqrt{\frac{x^2-4}{e^x}} \geq 0 \qquad \forall x \in D$$

$\downarrow$

SI ANNULLA PER

$$\frac{x^2-4}{e^x} = 0 \iff x^2-4=0$$

$$x^2 = 4 \longrightarrow x=-2 \vee x=2$$

La funzion è POSITIVA per $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

NEGATIVA MAI

NULLA per $x=-2$, $x=+2$

$A=(-2,0) \qquad B=(2,0)$

$0 \notin D \Rightarrow$ Non c'è intersezione con l'asse y

LIMITI

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{\overbrace{x^2-4}^{+\infty}}{\underbrace{e^x}_{0^+}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{\overbrace{x^2-4}^{+\infty}}{\underbrace{e^x}_{+\infty}}} = 0$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = f(-2) = 0$$

$$\lim_{x \to +2^+} f(x) = f(2) = 0$$

DERIVATA PRIMA

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{e^x}} = \left(\frac{x^2-4}{e^x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

DERIVATA DI $\frac{x^2-4}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4}{e^x}\right)^{\overset{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}} \underbrace{\frac{2x(e^x)-(x^2-4)e^x}{e^{2x}}}$$

$$= \sqrt{\frac{e^x}{x^2-4}} \; \frac{\cancel{e^x}(2x-x^2+4)}{2\,e^{\cancel{2x}\,x}}$$

$$= \frac{\sqrt{e^x}\,(-x^2+2x+4)}{2e^x\sqrt{x^2-4}} = \frac{-x^2+2x+4}{2\sqrt{e^x}\sqrt{x^2-4}}$$

$$\frac{\sqrt{e^x}}{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}}\cdot(e^x)^{-1} = (e^x)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{e^x}$$

$$\frac{-x^2+2x+4}{2\sqrt{e^x}\sqrt{x^2-4}} \geq 0$$

$2 > 0$

$\sqrt{e^x} > 0$

$\sqrt{x^2-4} > 0 \quad \forall x \in D$

$D_{f'} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \not\subset D_f$

$-x^2+2x+4 \geq 0$

$x^2-2x-4 \leq 0$

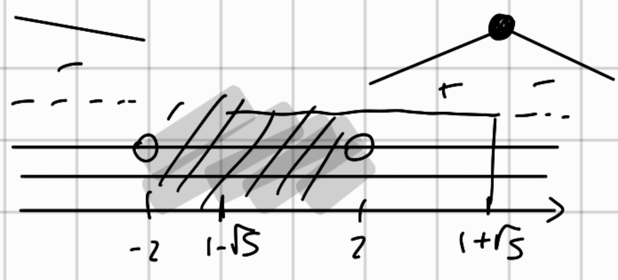
$\Delta = 4+16 = 20$

$\sqrt{20} = \sqrt{5\cdot 4} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{4} = \sqrt{5}\cdot 2$

$$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$x_1 = 1-\sqrt{5}$

$x_2 = 1+\sqrt{5}$



$1-\sqrt{5} \leq x \leq 1+\sqrt{5}$

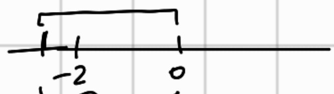
$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$$

$1 + 2,\ldots = 3,\ldots$

$1 - 2,\ldots = -1,\ldots$

$$-(-2)^2$$

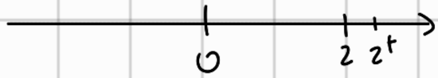
$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{-x^2+2x+4}{2\sqrt{e^x}\sqrt{x^2-4}} = \frac{-4-\cancel{4}+\cancel{4}}{2\sqrt{e^{-2}}\;\;0^+} = \frac{\ominus}{\oplus\;0^+} = -\infty$$



$(-2^-)^2 = 4^+$

$(-2^-)^2 - 4$

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2+2x+4}{2\sqrt{e^x}\sqrt{x^2-4}} = \frac{-\cancel{4}+\cancel{4}+4}{2\sqrt{e^2}\;\;0^+} = \frac{\oplus}{\oplus\;0^+} = +\infty$$



LA FUNZIONE È DECRESCENTE PER $x \in (-\infty, -2) \cup (1+\sqrt{5}, +\infty)$

CRESCENTE PER $x \in (2, 1+\sqrt{5})$

PRESENTA DUE PUNTI A TANGENTE VERTICALE $x = \pm 2$

UN PUNTO DI MASSIMO $M = (1+\sqrt{5}, f(1+\sqrt{5})) \simeq (3.23, 0.5)$

PROBLEMA

Individua due numeri la cui somma è 20 e la cui somma dei quadrati è minima.

$X =$ UNO DEI DUE NUMERI

$\hat{X} = 20 - X$

$\min \{ \hat{X}^2 + x^2 \}$

$$f(x) = x^2 + (20-x)^2$$
$$x^2 + 400 - 40x + x^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 400$$

CERCHIAMO IL MINIMO NEI PUNTI IN CUI $f'(x) = 0$

$f'(x) = 4x - 40$

$1 + 19 = 20$

$1^2 + (19)^2 =$

$5^2 + (15)^2 =$

$10^2 + 10^2 = 200$

$f'(x) = 0 \iff 4x - 40 = 0$

$4x = 40$

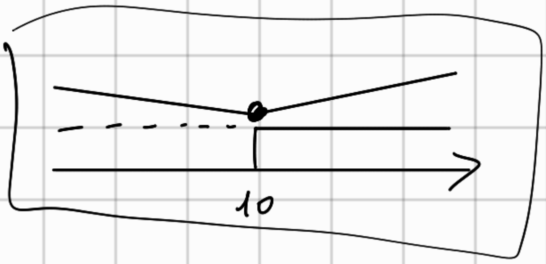
$\boxed{x = 10}$

$\Downarrow$

$\hat{X} = 20 - 10 = 10$

$f'(x) \geq 0$

$x \geq 10$



I due numeri sono 10, 10

PROBLEMA data la funzione $f(c) = -3\sqrt[5]{e^c}$ $\quad c \in [0,100]$

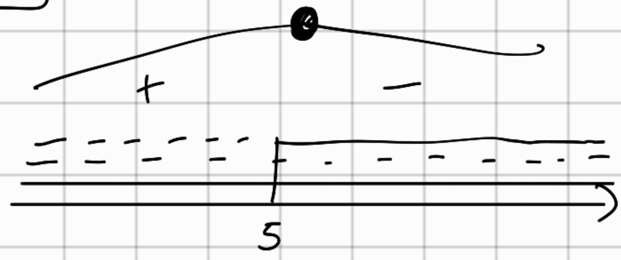
Si ricerchi per quale valore di c è MASSIMA $\frac{f(c)}{c}$

$$(e^x)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{x}{5}}$$

$$\max\left(\frac{f(c)}{c}\right) = \max\left\{\underbrace{\frac{-3\sqrt[5]{e^x}}{x}}_{g}\right\} \qquad x \in [0,100]$$

$$g'(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}\cdot\frac{1}{5}x - 3e^{\frac{x}{5}}}{x^2} = \frac{-3e^{\frac{x}{5}}\left(\frac{1}{5}x-1\right)}{x^2} \geq 0$$

$-3e^{\frac{c}{5}} > 0$	$x^2 > 0$	$\frac{1}{5}x - 1 \geq 0$
$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{5}x \geq 1$
		$\boxed{x \geq 5}$



SI HA UN MASSIMO
PER $x = 5$

SE VIENE RICHIESTA LA PENDENZA MASSIMA DI UNA FUNZIONE f

L'INCLINAZIONE MASSIMA

$$\max_x \{|f'(x)|\}$$

STUDIARE LA SEGUENTE FUNZIONE

- $f(x) = \dfrac{2\ln^2(x) + 3\ln(x) + 2}{x}$ C.E. $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow D = (0, +\infty)$

SEGNO

$$\frac{2\ln^2(x) + 3\ln(x) + 2}{x} \geq 0$$

$x > 0$

$\forall x \in D$

$2\ln^2(x) + 3\ln(x) + 2 \geq 0$

$t = \ln(x)$

$2t^2 + 3t + 2 \geq 0$

$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\forall x \in D$

$+$

NO INTERSEZIONI ASSE X

$0 \notin D \Rightarrow$ NO INTERSEZIONE ASSE y

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{2\ln^2(x)+3\ln(x)+2}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty \Rightarrow \text{A. V. DESTRO}$$

$x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{2\ln^2(x)+3\ln(x)+2}^{+\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} \underset{DH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{4\ln(x)\cdot\frac{1}{x}+\frac{3}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln(x)+3}{x} = 0$$

$\boxed{y=0}$ e' A. OR. DESTRO

PER CASA PROSEGUIRE