Lezione 21 GLI INTEGRALI INDEFINITI 12/12/23

FINORA DATA f ABBIAMO CALCOLATO f'

ADESSO CERCHIAMO DI FARE IL CONTRARIO:
DATA f, QUALE F FUNZIONE È TALE CHE $F'(x) = f(x)$?

ESEMPIO se $f(x) = 2x$ $\quad F(x) = x^2$

$F(x) = x^2 - 1 \quad F'(x) = 2x$

DEFINIZIONE
F è detta PRIMITIVA della funzione f se

$$F'(x) = f(x)$$

TEOREMA
Data $F(x)$ primitiva di $f(x)$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$$G(x) \text{ è PRIMITIVA di } f \iff G(x) = F(x) + c$$

DEFINIZIONE
L' INTEGRALE INDEFINITO di una funzione $f(x)$ è l'insieme di tutte le primitive di f.

Si denota con $\int f(x) \underbrace{dx}_{\text{DIFFERENZIALE}}$ si legge integrale di $f(x)$ in dx

ESEMPIO

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

ESEMPI

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln(a)} + c$$

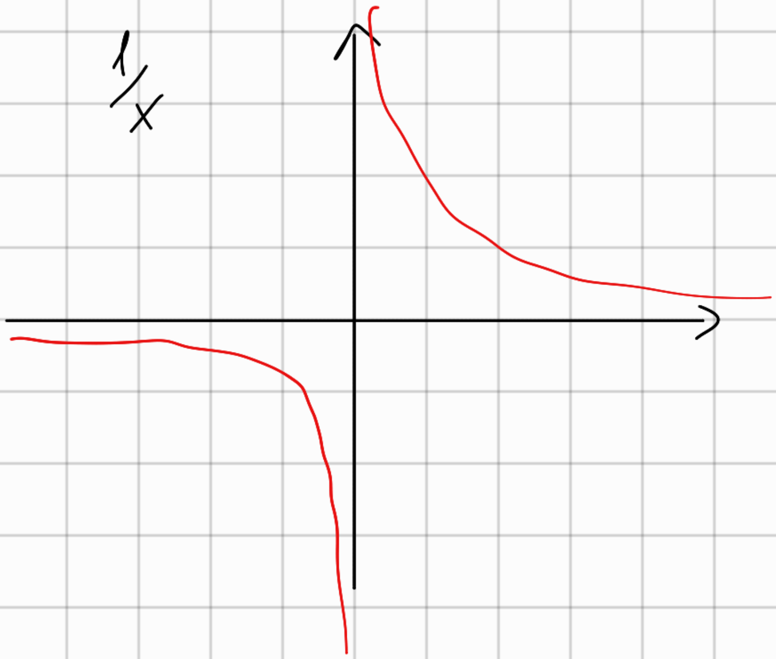
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

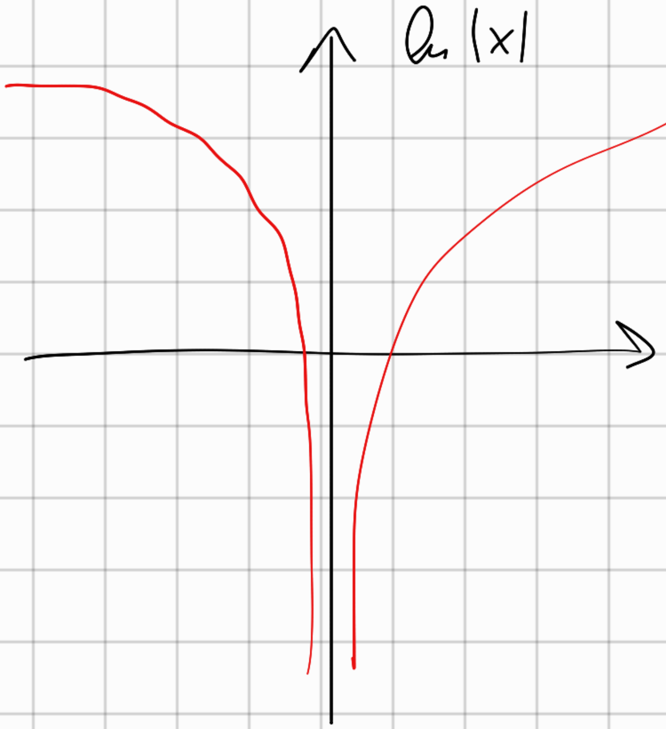
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = arcsin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + c$$





NON TUTTE LE FUNZIONI HANNO UNA PRIMITIVA ESPRIMIBILE IN FORMA CHIUSA

ESEMPIO $\int e^{-x^2} dx$ NON SI PUÒ SEMPLIFICARE MA SI LASCIA SCRITTO COSÌ

PROPRIETÀ

LINEARITÀ

$$\begin{cases} \bullet \ \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx & \forall f, g \text{ FUNZIONI} \\ \bullet \ \int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx & \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\int f(x) g(x) = \ ?$$

NON ESISTE UNA FORMULA GENERALE

ESISTONO 2 POSSIBILI FORMULE CHE POTREBBERO FUNZIONARE

---

① INTEGRALE PER PARTI

$$\int \underbrace{f'(x) g(x)}\,dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE

$$[f(x) g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$\int f'(x) g(x)\,dx = \underbrace{\int [f(x) g(x)]'\,dx}_{} - \int f(x) g'(x)\,dx$$

$$\int f'(x) g(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$$

ESEMPIO

$$\int \underset{g}{x} \underset{f'}{\cos x}\,dx = \underset{f \cdot g}{x \sin x} - \int \underset{g' f}{\sin x}\,dx = x \sin x - (-\cos x) + c$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

$$f(x) = \sin x$$

② INTEGRALE DI FUNZIONI COMPOSTE

$$f(g(x)) = \int \underbrace{\left(f[g(x)]\right)'}\,dx = \int \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx}$$

ESEMPIO

- $$\int x e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} \cdot 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{g'(x)} \underbrace{e^{x^2}}_{f'(g(x))} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

- $$\int \frac{x^2}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{\frac{1}{x^3-1}}_{\frac{1}{f(x)}} \underbrace{3x^2}_{f'(x)} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3-1| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

- $$\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]' = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{f'(g(x))} dx = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

- $$\int \underset{f'}{x} \underset{g}{\ln x}\, dx = \dots$$

- $$\int \underbrace{(x+2)}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'}\, dx = \dots$$

- $$\int \sqrt{4x+1}\, dx = \frac{1}{4} \int \underset{g'}{4} \underbrace{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}_{f'(g(x))} dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\cancel{4}\,2} \frac{(4x+1)^{3/2}}{3/\cancel{2}} = \frac{1}{6} \sqrt{(4x+1)^3} + c$$

• $\int 2x\,(x^2-1)^3\,dx = \frac{(x^2-1)^4}{4} + c$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE (SERVE PER ESPLICITARE LA FORMULA APPENA VISTA)

Sia $x(t)$ CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$$\Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = \int f(x(t)) \cdot \frac{1}{x'(t)}\,dt$$

$\int 2x\,(x^2-1)^3\,dx$

$t = x^2 - 1$

MODO VELOCE
$dt = 2x\,dx$

$t+1 = x^2$

$\sqrt{t+1} = x$

$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\,dt} = dx$

FORMULA GENERALE
$g(t) = f(x)$
$\Downarrow$
$g'(t)\,dt = f'(x)\,dx$

$$\int \cancel{2\sqrt{t+1}}\,(t)^3\,\frac{1}{\cancel{2\sqrt{t+1}}}\,dt = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + c$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-1)^4 + c$$

$-\int \cos^2(x)\underbrace{(\sin x)\,dx}_{dt}$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\,dx$

$-\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + c$

$= -\frac{\cos^3 x}{3} + c$

L'INTEGRALE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx \qquad N, D \text{ POLINOMI}$$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ grado N ≥ grado D ⇒ DIVISIONE FRA POLINOMI COL RESTO

65 : 3

$$\begin{array}{r|l} \overset{N}{65} & \overset{D}{3} \\ -6 & 21 \; Q \\ \hline 15 & \\ 3 & \\ \hline 2 \; R & \end{array}$$

$D \cdot Q + R = N$

$3 \cdot 21 + 2$

$63 + 2 = 65$

$$\int \frac{\overbrace{x^3+2x^2+x+1}^{N}}{\underbrace{x^2+1}_{D}}\,dx$$

grado N ≥ grado D

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +x & +1 & x^2+1 \\ -x^3 & & -x & & x+2 \\ \hline / & 2x^2 & & +1 & \\ & -2x^2 & & -2 & \\ \hline & / & & -1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

$$\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\frac{(x^2+1)(x+2) - 1}{x^2+1} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$x+2-\frac{1}{x^2+1} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x+2)}{\cancel{x^2+1}} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$DQ + R = N$$

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D} \rightarrow$$ SI RICONDUCE AL CASO 2

$$\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \int x+2\,dx + \int \frac{-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \operatorname{arctg}(x) + c$$

$\boxed{\text{CASO 2}}$ grado $N <$ grado D

PRIMA VERIFICA - N è la DERIVATA DI D ?

Se sì $\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

Se No

SUPPONIAMO GRADO $D = 2$

CASO 2.a $\Delta > 0 \Rightarrow$ SCOMPONGO IL DENOMINATORE

ESEMPIO

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{5x-1}{(x+2)(x-1)}\,dx$$

$$\Delta = 1+8 = 9$$

$$x_{12} = \frac{+1 \pm 3}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = -1 \\ \searrow x_2 = 2 \end{array}$$

$$\frac{5x-1}{(x+2)(x-1)} = \boxed{\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}}$$

$A, B \in \mathbb{R}$

NON LI CONOSG
LI CERCO USANDO
QUESTO PROCEDIMENTO

$$= \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x+2)(x-1)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x+2)(x-1)}$$

$$\begin{cases} A+B = 5 \\ A-2B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2B-1+B = 5 \\ A = 2B-1 \end{cases} = \begin{cases} 3B = 6 \\ A = 2B-1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{5x-1}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = 3\ln|x+2| + 2\ln|x-1| + c$$

CASO 2.b

L'INTEGRALE È SCOMPONIBILE NELLA SOMMA DI DUE FRAZIONI UNA CON AL NUMERATORE UN POLINOMIO DI GRADO 1 CHE È LA DERIVATA DEL DENOMINATORE e L'ALTRO UNA COSTANTE. QUEST'ULTIMO INTEGRALE SI RISOLVE UTILIZZANDO LA FORMULA DELLA POTENZA -2 COME SEGUE.

$$\int \frac{2x-3-1+1}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx$$

$2x-4$

$\Delta = 0$

$(x-2)^2$

$$\ln|x^2-4x+4| + \int 1(x-2)^{-2}\,dx$$

$$\sim \quad + \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$\ln|x^2-4x+4| - \frac{1}{(x-2)} + c$$

$\boxed{\text{CASO 2.C}}$ $\quad \Delta < 0$

CI SI RICONDUCE ALLA DERIVATA DI $\operatorname{arctg}(f(x))$

$$[\operatorname{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}}$$

ESEMPIO

$$\int \frac{1}{\underbrace{x^2+2x+2}_{\downarrow}}\,dx$$

$\Delta = 4-8 = -4 <$

COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

$$x^2 + 2x + 1$$
$$a^2 \quad 2ab$$

$$\frac{2\cancel{a}b}{\cancel{\sqrt{a^2}}} = 2b$$

$$b = \frac{2ab}{2\sqrt{a^2}} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} = 1$$

$$b^2 = \frac{(2ab)^2}{4a^2} = \frac{4x^2}{4x^2} = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1\underbrace{-1+2}}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{(x+1)^2}\underbrace{+1}}\,dx =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

ESEMPIO PIÙ GENERALE

$$\int \frac{3}{4x^2-2x+1}\,dx$$

$$b^2 = \frac{(-2x)^2}{4(4x^2)} = \frac{\cancel{4x^2}}{1\cdot 4\cancel{x^2}} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$$

$\boxed{\text{I COMPLETO IL QUADRATO AGGIUNGENDO E TOGLIENDO } \frac{1}{4}}$

$\boxed{\text{II MOLTIPLICO SOPRA E SOTTO PER UNA COSTANTE PER OTTENERE } \boxed{+1}}$

$$\int \frac{3}{\underbrace{4x^2-2x}\ \underbrace{+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}}\,dx = \int \frac{3\cdot\frac{4}{3}}{\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}\,dx =$$

$$\frac{-1+4}{4} = \frac{3}{4}$$

$$= \int \frac{4}{\frac{4}{3}\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

$\boxed{\text{III PORTO DENTRO LA COSTANTE CALCOLANDONE LA RADICE QUADRATA}}$

$$= \int \frac{4}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx$$

$$\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right]' = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3}\int \frac{4/\sqrt{3}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx$$

$\boxed{\text{IV MOLTIPLICO DENTRO E FUORI DALL'INTEGRALE PER UNA COSTANTE TALE DA AVERE } f'(x)}$

$$\left[\operatorname{arctg}(f(x))\right]' = \boxed{\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}}$$

$\boxed{\text{V APPLICO LA FORMULA } \operatorname{arctg}(f(x))}$

$$= \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2x-\frac{1}{2}\right)\right] + C$$