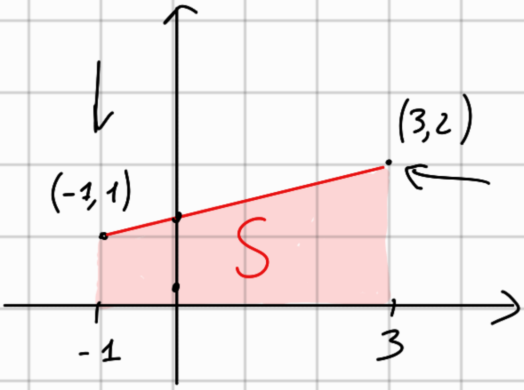
Lezione 24 19/12/23

Scrivi e calcola l'integrale che rappresenta il valore dell'area in figura.



$$S = \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left[\frac{x^2}{8} + \frac{5}{4}x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left[\frac{9}{8} + \frac{15}{4} - \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{15}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} =$$

$$= 1 + 5 = 6$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$$

$$y = mx + q$$

$$\begin{cases} 1 = m(-1) + q \\ 2 = m(3) + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m + q = 1 \\ 3m + q = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

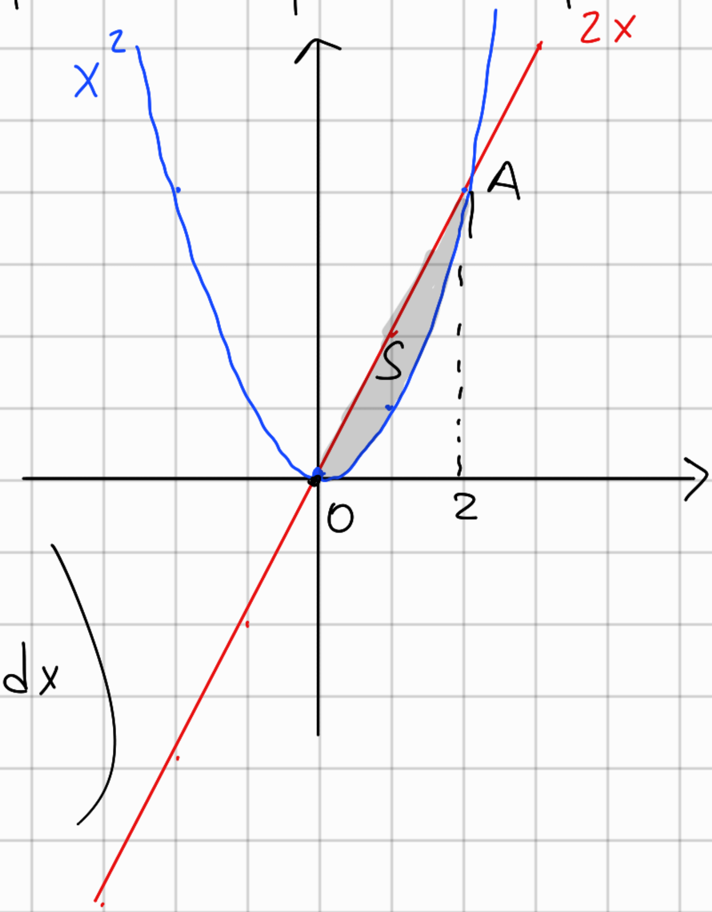
$$m = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{5}{4}$$

DIRE SE LE SEGUENTI FUNZIONI SODDISFANO LE IPOTESI DEL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

- $y = \dfrac{4}{x-1}$ in $[1, 4]$ $\quad$ y NON È CONTINUA IN $1 \to$ NO
- $y = \sqrt{x}$ in $[0, 6]$ $\quad$ SÌ

• $y = \ln(x+3)$ in $(-1, 0]$ NO $(-1,0]$ NON È CHIUSO

Calcola l'area della porzione di piano limitata compresa tra le funzioni $2x$ e x^2.



$O = (0,0)$

$A = (2,4)$

$$\int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx$$

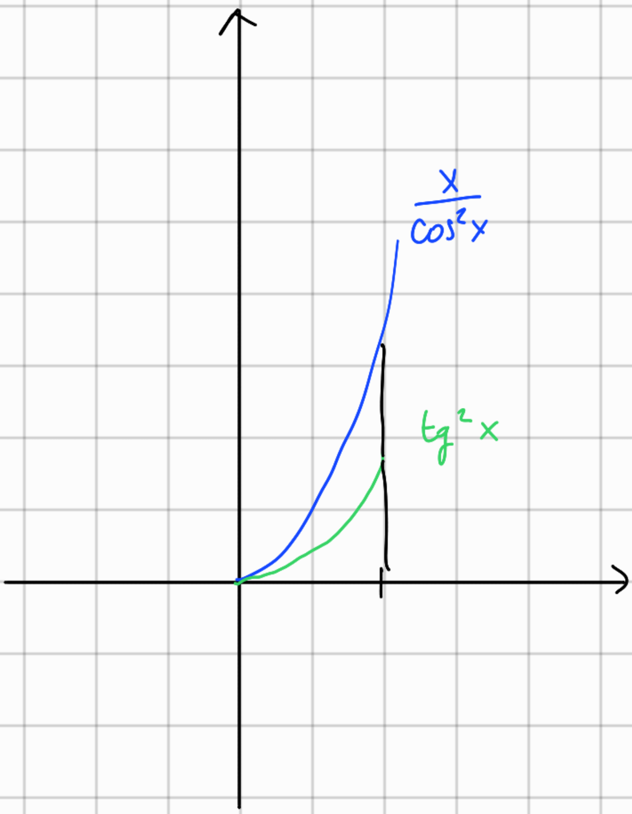
$$\left(\int_0^2 (2x - x^2)\,dx\right)$$

$$= \left(x^2\Big|_0^2\right) - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) =$$

$$= 2^2 - \cancel{0^2} - \left(\frac{2^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

Calcola l'area della porzione di piano

$$T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, \quad tg^2 x \le y \le \frac{x}{\cos^2 x} \right\}$$



$$\text{Area}(T) = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{x}{\cos^2 x} - tg^2 x \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\frac{x-1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x-1}{\cos^2 x} + x \Big|_0^{\pi/4} = \Big[tg(x)(x-1) + \ln|\cos x| + x \Big]_0^{\pi/4} =$$

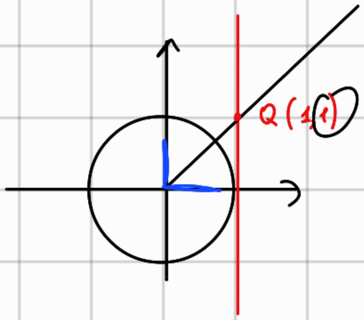
$$\int \underbrace{(x-1)}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{f'(x)} dx = \underbrace{tg(x)}_{f} \underbrace{(x-1)}_{g} - \int \underbrace{1}_{g'} \, tg(x) \, dx \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = [tg\, x]'$$

$f(x) = tg(x)$

$$= tg(x)(x-1) + \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$= tg(x)(x-1) + \ln|\cos x|$$

$$\Big[tg(x)(x-1) + \ln|\cos x| + x \Big]_0^{\pi/4} = \overbrace{1\left(\frac{\pi}{4}-1\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4}}^{F(\pi/4)} - \overbrace{(0+0+0)}^{F(0)}$$



$$= \frac{\pi}{4} - 1 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=$$

SOMMATORIA DISCRETA

PARTO DA FERMO

NEL PRIMO SECONDO FACCIO UN PASSO

NEL SECONDO SECONDO FACCIO DUE PASSI

⋮

NEL SETTIMO SECONDO FACCIO 7 PASSI

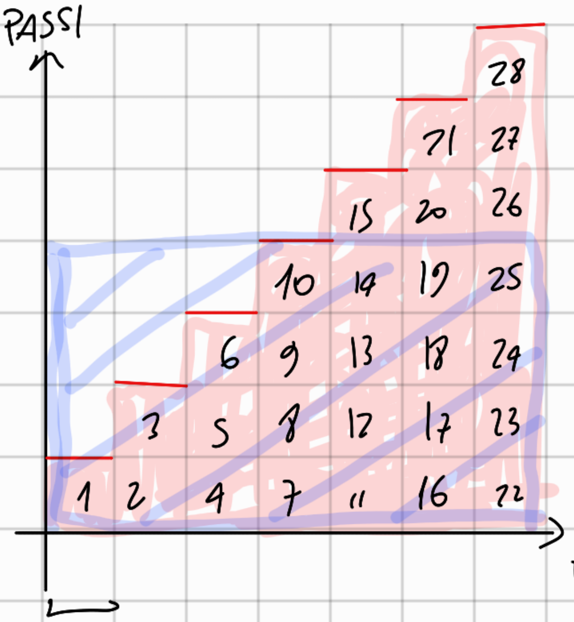
$$\sum_{k=1} k = \frac{n(n+1)}{2} =$$

QUANTI PASSI HO FATTO?

$$1+2+3+4+5+6+7 = \sum_{k=1}^{7} k = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

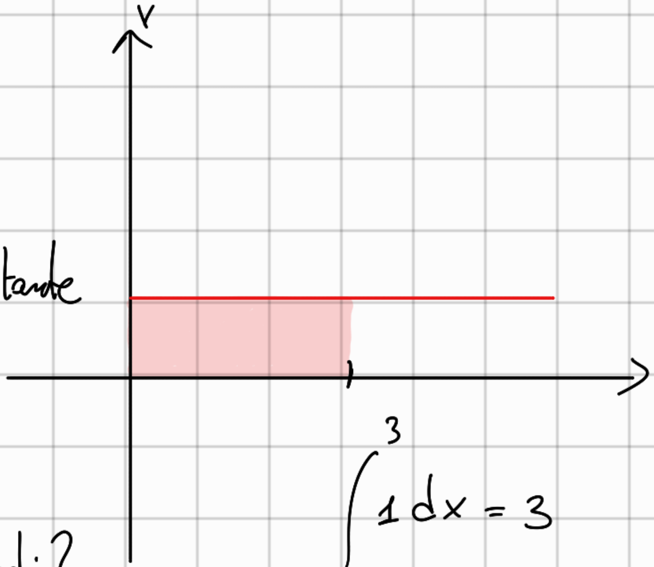
MEDIAMENTE QUANTI PASSI HO FATTO? OGNI SECONDO?

$$\frac{\sum_{k=1}^{7} k}{7} = \frac{28}{7} = 4$$



Se considero una funzione continua? Per esempio la funzione costante

$$\underbrace{\Delta t}_{\substack{1 \text{ secondo} \\ \text{QUANTITÀ FINITA}}} \longrightarrow \underbrace{dt}_{\substack{1 \text{ "istante"} \\ \text{QUANTITÀ INFINITESIMA}}}$$



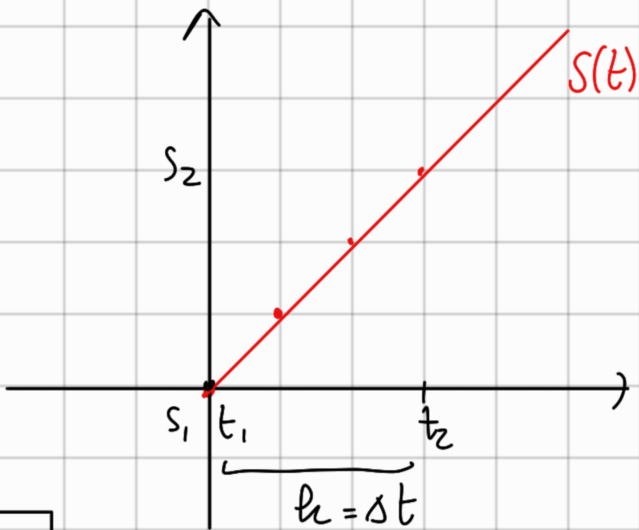
Supponiamo di camminare a velocità costante

$$V = 1 \frac{m}{s}$$

$$\int_0^3 1\,dx = 3$$

Quanti metri ho fatto dopo 3 secondi?

$s(t)$ SPOSTAMENTO



$$\Delta S = S_2 - S_1 = s(t_2) - s(t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = h$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \boxed{\frac{s(t_1+h) + s(t_1)}{h}}$$

$$t_2 = t_1 + h$$

RAPPORTO INCREMENTALE

PER h che tende a 0 $\quad t_1 = t$

NOTAZIONE

$$v(t)=\frac{ds}{dt} = s'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)+s(t)}{h}$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$s(t) = vt \qquad v \in \mathbb{R}$ COSTANTE

$$s'(t) = v$$

$a(t) = s''(t) = 0$ ACCELERAZIONE NULLA (cioè la velocità non cambia nel tempo)

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

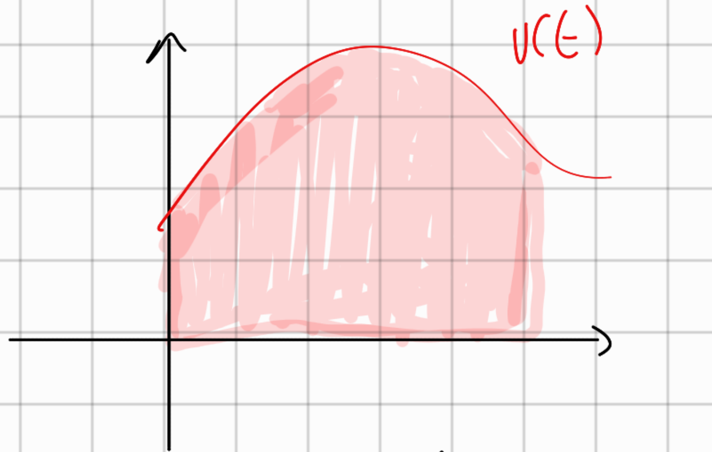
$a(t) = a \qquad a \in \mathbb{R}$

$C = v_0$ VEL. INIZIALE

$$v(t) = \left(\int a\,dt\right) = at + v_0$$

$C = S_0$ POSIZIONE INIZIALE

$$s(t) = \left(\int (at+v_0)\,dt\right) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$



$S(0)$ = POSIZIONE INIZIALE

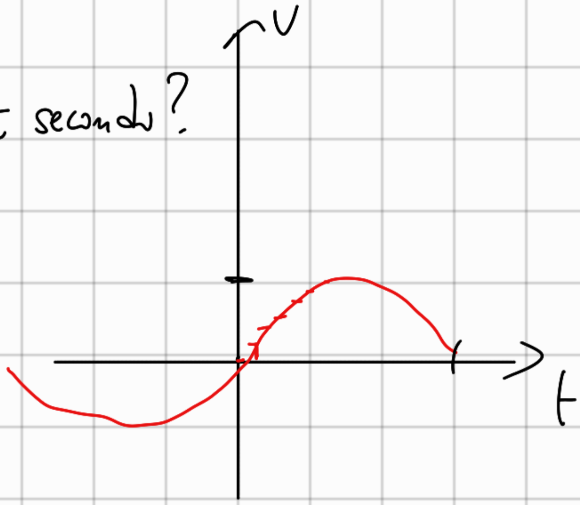
$S(T)$ = POSIZIONE AL TEMPO T

$$\Delta S = \underbrace{S(T) - S(0)}_{\text{SPAZIO TOTALE PERCORSO}} = \int_0^T v(t)\,dt$$

RICAVIAMO QUESTA FORMULA DAL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Mi muovo a una velocità $v(t) = \sin(t)$

QUANTO SPAZIO HO PERCORSO DOPO π secondi?



$t = 0$

$$\Delta S = \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt$$

$$= \left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

VELOCITÀ MEDIA

$$\frac{2\,m}{\pi\, s} = \frac{2}{\pi}\,\frac{m}{s}$$

Abbiamo un macchinario con un consumo variabile

al tempo t il suo consumo è $C(t) = \dfrac{3t+2}{6t+1}$

QUANTO HO CONSUMATO DOPO 1 UNITÀ DI TEMPO?

$$\int_0^1 \frac{3t+2}{6t+1}\, dt$$

$$\| $$

grado N = grado D

$\Downarrow$

$$\begin{array}{rr|l} 3t & +2 & 6t+1 \\ \cline{3-3} -3t & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \cline{1-2} / & \frac{3}{2} & \end{array}$$

$$\frac{\cancel{3}}{2}\,\frac{1}{\cancel{6}_{2}} \int_0^1 \frac{6}{6t+1}\, dt + \int_0^1 \frac{1}{2}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{4} \ln|6t+1| + \frac{1}{2} t\right]_0^1 = \frac{1}{4} \ln(7) + \frac{1}{2} - \left[0 + 0\right] \simeq 0.99$$

ESEMPIO: CALCOLO DELLA GITTATA CARDIACA

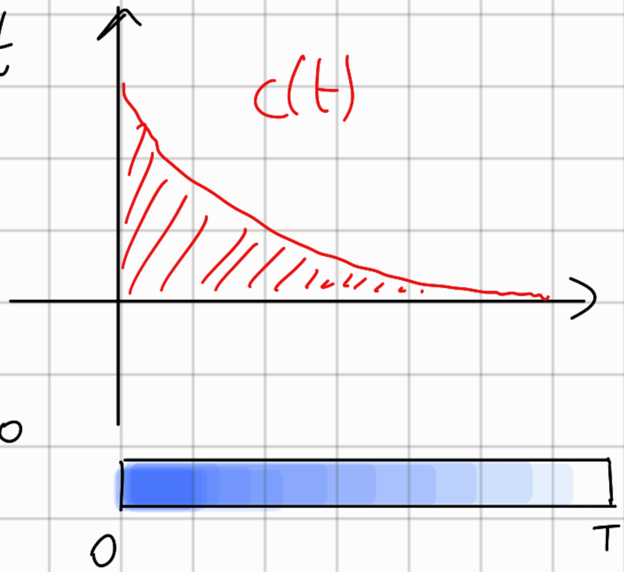
$$G = \frac{\text{QUANTITÀ DI SANGUE POMPATO}}{\text{UNITÀ DI TEMPO}}$$ GITTATA CARDIACA

Viene inserita una certa quantità di tintura all'interno del cuore

Q QUANTITÀ DI TINTA (NOTA)

$c(t)$ CONCENTRAZIONE DI TINTURA ALL'ISTANTE t NELL'AORTA

$c(t)$ LA POSSO MISURARE



T è il momento in cui smetto di rilevare la presenza della tinta $C(T) \simeq 0$

$G\,c(t)$ = QUANTITÀ DI TINTA CHE VIENE ESPULSA ALL'ISTANTE t

$$\int_0^T G\, c(t)\, dt = Q$$

LA SOMMA DI TUTTA LA TINTA ESPULSA DEVE COINCIDERE CON LA QUANTITÀ INSERITA INIZIALMENTE

se $c(t) = 0.2$
$G = 4$

$$0.2 \cdot 4 = \frac{2}{\cancel{10}_{5}} \cdot \cancel{4}^{2} = \frac{4}{5}$$

$$G \int_0^T c(t)\, dt = Q$$

$\boxed{G \text{ È COSTANTE}}$

$$G = \frac{Q}{\int_0^T c(t)\, dt}$$

SE $c(t) = e^{-2t}$ $\qquad T = 10$

$e^{-2\cdot 10} = e^{-20} \simeq 0.000000002$

$Q = 2$

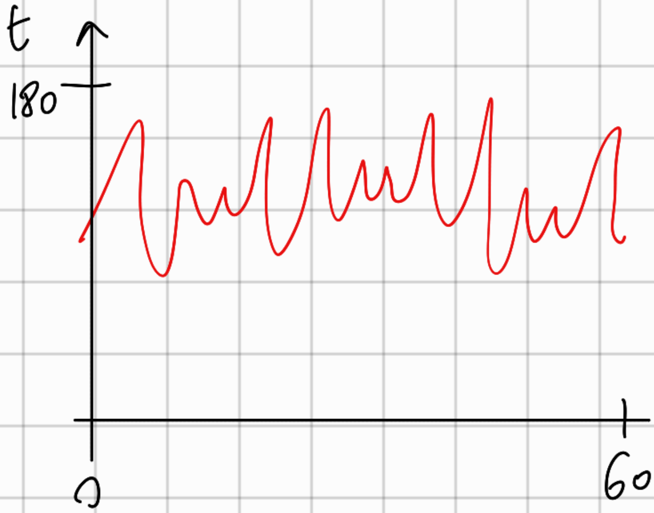
$$G \int_0^{10} e^{-2t}\,dt = 2$$

$$G = \frac{2}{-\frac{1}{2}\int_0^{10} -2e^{-2t}\,dt} = \frac{2}{-\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\Big|_0^{10}\right]} = \frac{2}{-\frac{1}{2}\left[\underbrace{e^{-20}}_{\simeq 0} - \underbrace{e^{0}}_{=1}\right]}$$

$$\simeq \frac{2}{-\frac{1}{2}(-1)} = 4$$

$P(t)$ è la PRESSIONE MISURATA AL TEMPO t

$$P_{MEDIA} = \frac{\int_0^{60} P(t)\,dt}{60}$$



STUDIO DELLE POPOLAZIONI (MALTHUS)

$$N(t) = N_0 R^t$$
$$N(t) = N_0 e^{at}$$

CHIAMO a QUESTO NUMERO

$$a := \ln R$$
$$\Downarrow$$
$$e^a = R$$

NELLA VITA REALE a NON È COSTANTE

MA UNA FUNZIONE DEL TEMPO $a(t)$

ESEMPIO

$N_0 = 50$

$$a(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{5}\right)$$

$$N(t) = 50\, e^{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{5}\right)}$$

$$e^{\frac{1}{2}\sin(2\pi)} = 1$$

per $t = 0 \to 50$

per $t = 10\pi \to 50$

$$\frac{\int_0^{10\pi} 50 e^{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{5}\right)}\, dt}{10\pi} =$$

SI CALCOLA CON APPROSSIMAZIONI NUMERICHE PERCHÉ NON SI RIESCE A TROVARE UNA PRIMITIVA IN FORMA CHIUSA

- Problema inverso

Ho consumato 81 facendo andare un macchinario che consuma $C(t) = t^2$.

Per quanto tempo ho fatto andare il macchinario?

Chiamo T il tempo totale.

$$81 = \int_0^T t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^T = \frac{T^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{T^3}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{T^3}{3} = 81$$

$$\Downarrow$$

$$T^3 = 27$$

$$T = \sqrt[3]{27} = 3$$