1 Equazioni e disequazioni di secondo grado, coniche

Esercizio 1.1. Vero o falso?

a. La disequazione $x^2 \geq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

b. La disequazione $x^2 \leq 0$ è verificata se e solo se $x = 0$

c. La disequazione $x^2 - 1 \geq 0$ è verificata per $x \leq 1 \wedge x \geq 1$

d. La disequazione $x^2 + 4$ è verificata per $x \leq 2 \vee x \geq 2$

e. La disequazione $-x^2 + 2x - 1 < 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 1.2. Inventa:

a. un'equazione di secondo grado impossibile;

b. un'equazione di secondo grado che abbia come insieme delle soluzioni $\mathcal{S} = \{0\}$;

c. un'equazione di secondo grado che abbia come insieme delle soluzioni $\mathcal{S} = \{0, 1\}$;

Esercizio 1.3. Risolvi graficamente la seguente disequazione:

$$9 - 25x^2 < 0$$

Esercizio 1.4. Risolvi nei numeri reali l'equazione:

$$2x^2 - 3x = -7$$

Esercizio 1.5. Risolvi nei numeri reali la disequazione:

$$-4x^2 + 2x - 1 > 0$$

Esercizio 1.6. Disegnare nel piano cartesiano il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 10x + 2 \leq y < 2x + 2\}$$

Esercizio 1.7. Disegnare nel piano cartesiano il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6y^2 - 1 + x^2 \geq 5\}$$

Dire se il punto $(1, \frac{1}{2}) \in A$

Esercizio 1.8. Disegnare nel piano cartesiano il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3(x^2 - 4) < 4y^2\}$$

Dire se il punto $(1, \frac{1}{2}) \in A$

Esercizio 1.9. Trovare l'equazione della retta parallela ad $y = x + 2$ passante per il punto $Q = (3, 3)$.

Esercizio 1.10. Sia γ la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

- Scrivere l'eq. di γ.
- Trovarne l'espressione dopo una traslazione verso l'alto di 1 e verso destra di 3.

2 Equazioni e disequazioni polinomiali, fratte, esponenziali e logaritmiche

Esercizio 2.1. Scrivere le condizioni di esistenza e risolvere l'equazione fratta

$$\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 0$$

Esercizio 2.2. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni fratte:

1) $\frac{10}{4 - x} = -5$

2) $\frac{(x-1)^2 - x^2}{5x + 10} = 0$

3) $\frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x - 2}$

4) $\frac{1}{2x - 2} + \frac{1}{3x^2 - 3} = \frac{1}{4x + 4}$

5) $-\frac{3}{x} \geq 12$

6) $-\frac{1}{3 - x} < \frac{x}{6 - 2x}$

7) $\frac{2x - 8}{4 - 3x} \leq 0$

8) $\frac{x^2}{x - 2} > 0$

Esercizio 2.3. Vero o falso?

a. La disequazione $2^x \geq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

b. La disequazione $2^x \leq 0$ è verificata se e solo se $x = 0$

c. La disequazione $e^{-x} \leq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

d. La disequazione $(0,2)^x \geq (0,2)^3$ è verificata per ogni $x \geq 3$

e. La disequazione $e^x \leq \frac{1}{e}$ è verificata per ogni $x \leq -1$

Esercizio 2.4. Dimostrare che se x e y sono numeri reali tali che:

$$e^{2x} - e^{2y} = 0$$

allora x=y

Esercizio 2.5 (Bonus)**.** Risolvi la seguente equazione

$$x^3 \cdot 2^x - 8x^3 - 4x \cdot 2^x + 32x = 0$$

(*Suggerimento*: prima di fare calcoli strani, prova a usare le scomposizioni!)

Esercizio 2.6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Se $3^x = 11$ allora $x = \log_{11} 3$;

(b) Se $\log_9 a = -2$ allora $a = (-2)^9$;

(c) $2^{-\frac{1}{3}} = x$ è equivalente a $\log_2 x = -\frac{1}{3}$;

(d) $\log_{-2}(-8) = 3$ perchè $(-2)^3 = -8$;

(e) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$;

(f) la condizione di esistenza dell'equazione $\log_2^2 x - 4 = 0$ è $x < -2 \vee x > 2$.

Esercizio 2.7. Sviluppare le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi:

- $\log_2(\frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}})$
- $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[5]{4}}{8\cdot\sqrt{2}}$
- $\log_5 \frac{5}{61\cdot\sqrt[4]{91}}$

Esercizio 2.8. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

- $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$
- $\frac{\log_2(4^{x+1}-2)+2x}{2x+1} = 1$

Esercizio 2.9. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $y = \dfrac{(x+2)^2}{\ln(1+x)}$

2) $y = \log_3(1+e^{\frac{x}{3}})$

3) $y = \dfrac{2x}{\ln(x^2-1)} + \dfrac{3}{\sqrt{x+2}} - 2x$

4) $y = \sqrt{4^{3x-x^2-2}}$

3 Funzioni trigonometriche

Disegnare nella circonferenza goniometrica un angolo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \smallsetminus \{\frac{\pi}{4}\}$.

a. Individuare gli angoli $(\alpha - \pi)$, $(\alpha + \frac{3}{2}\pi)$, $(-\pi - \alpha)$

b. Considerando $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ noti, calcolare il seno e il coseno degli angoli citati nel punto a.

Esercizio 3.1. Vero o falso?

a. La funzione $\cos(x)$ è sempre positiva nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

b. La funzione $\sin(x)$ è sempre negativa nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

c. La funzione $\tan : (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva.

d. La funzione $\tan : (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva.

e. $\cos \frac{\pi}{3} > \cos -\frac{\pi}{4}$.

f. $\sin -\frac{\pi}{3} \leq \sin \frac{\pi}{6}$.

Esercizio 3.2. Chiamato ϑ l'angolo che la diagonale di un rettangolo forma con uno dei suoi lati, calcolare l'area del rettangolo sapendo che $\cos\vartheta = \frac{3}{5}$ e che il lato più lungo misura 8 cm.

Esercizio 3.3. Risolvere nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ le seguenti disequazioni:

a. $2\cos(x) + 1 \geq 0$

b. $\cos^2(x) \geq 1$

c. $\dfrac{1}{2\cos x - 1} < \dfrac{1}{2\cos x + 1}$

d. $\dfrac{\cos(2x)\sin(x)}{4\sin^2(x) - 3} \leq 0$

Esercizio 3.4. Determinare il dominio e il codominio delle seguenti funzioni studiate per $x \in [-\pi, \pi]$:

1) $y = 1 - \sin \dfrac{1}{x}$

2) $y = 3\tan(x + 1)$

3) $y = \ln(\sin(x))$

4) $y = \sqrt{\cos^2 x - 1}$

4 Limiti e Derivate

Esercizio 4.1. Calcola i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to -2^-} \frac{4x+3}{x^2-4}$

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{3^x \ln(x)}{2+x}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 2^x}{\sqrt{x+4}}$

4) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{2^x}{\ln x} + \frac{2}{x})$

Esercizio 4.2 (Forme Indeterminate)**.** Calcola i seguenti limiti usando l'ordine di infiniti o le loro gerarchie:

1) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^6 - 3x^4}{2x^2 - 2x + 1}$

2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 6}{3x^2 - 2x + x^3}$

3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3}}{x+1}$

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{\ln(x+1)}$

Esercizio 4.3. Calcola la derivata delle seguenti funzioni nei punti indicati affianco usando la definizione (limite del rapporto incrementale):

1. $f(x) = x^3 + 4x + 1, \qquad x_0 = 1$
2. $f(x) = 2x - 1, \qquad x_0 = 6$
3. $f(x) = \frac{3}{x-1}, \qquad x_0 = 4$
4. $f(x) = e^{x-1}, \qquad x_0 = 1$

Esercizio 4.4. Calcolare la derivata nel generico punto delle seguenti funzioni (si sfruttino le derivate note delle funzioni elementari e le proprietà su somma, prodotto, rapporto e funzioni composte):

1) $f(x) = 4x - 9$

2) $f(x) = 2x^3 - x$

3) $f(x) = 3\ln x$

4) $f(x) = 2\sqrt{x}$

5) $f(x) = -x^2 + 4x$

6) $f(x) = \sin(-x)$

7) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

8) $f(x) = \frac{9-x}{x^2-1}$

9) $f(x) = x\cos x$

10) $f(x) = (x-1)e^{-x}$

Bonus) $f(x) = |x|$

Esercizio 4.5. Calcola la derivata destra e la derivata sinistra delle funzioni:

1) $f(x) = \begin{cases} x-3 & se\ x \leq 3 \\ x^2-9 & se\ x > 3 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & se\ x > 0 \\ x^2+x & se\ x \leq 0 \end{cases}$

Esercizio 4.6 (Derivate di funzioni composte)**.** Calcola $f'(x)$ nei seguenti casi:

1) $f(x) = 4\sqrt{3x+2}$

2) $f(x) = 2\ln x - \sqrt[4]{\ln^3 x}$

3) $f(x) = e^{4x} + \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 x$

Esercizio 4.7. Calcola i seguenti limiti che presentano forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 10x}{\sin 5x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x^3 - x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2} + \sqrt{2x} - 2}{(x-2)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 2x}$

6) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2 - x}{2x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{2\ln x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{cotg} x}{\ln 2x^3}$