1 Equazioni e disequazioni di secondo grado, coniche

Esercizio 1.1. Vero o falso?

a. La disequazione $x^2 \geq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

b. La disequazione $x^2 \leq 0$ è verificata se e solo se $x = 0$

c. La disequazione $x^2 - 1 \geq 0$ è verificata per $x \leq 1 \wedge x \geq 1$

d. La disequazione $x^2 + 4$ è verificata per $x \leq 2 \vee x \geq 2$

e. La disequazione $-x^2 + 2x - 1 < 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 1.2. Inventa:

a. un'equazione di secondo grado impossibile;

b. un'equazione di secondo grado che abbia come insieme delle soluzioni $\mathcal{S} = \{0\}$;

c. un'equazione di secondo grado che abbia come insieme delle soluzioni $\mathcal{S} = \{0, 1\}$;

Esercizio 1.3. Risolvi graficamente la seguente disequazione:

$$9 - 25x^2 < 0$$

Esercizio 1.4. Risolvi nei numeri reali l'equazione:

$$2x^2 - 3x = -7$$

Esercizio 1.5. Risolvi nei numeri reali la disequazione:

$$-4x^2 + 2x - 1 > 0$$

Esercizio 1.6. Disegnare nel piano cartesiano il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 10x + 2 \leq y < 2x + 2\}$$

Esercizio 1.7. Disegnare nel piano cartesiano il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6y^2 - 1 + x^2 \geq 5\}$$

Dire se il punto $(1, \frac{1}{2}) \in A$

Esercizio 1.8. Disegnare nel piano cartesiano il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3(x^2 - 4) < 4y^2\}$$

Dire se il punto $(1, \frac{1}{2}) \in A$

Esercizio 1.9. Trovare l'equazione della retta parallela ad $y = x + 2$ passante per il punto $Q = (3, 3)$.

Esercizio 1.10. Sia γ la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

- Scrivere l'eq. di γ.
- Trovarne l'espressione dopo una traslazione verso l'alto di 1 e verso destra di 3.

2 Equazioni e disequazioni polinomiali, fratte, esponenziali e logaritmiche

Esercizio 2.1. Scrivere le condizioni di esistenza e risolvere l'equazione fratta

$$\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 0$$

Esercizio 2.2. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni fratte:

1) $\dfrac{10}{4 - x} = -5$

2) $\dfrac{(x-1)^2 - x^2}{5x + 10} = 0$

3) $\dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{1}{x - 2}$

4) $\dfrac{1}{2x - 2} + \dfrac{1}{3x^2 - 3} = \dfrac{1}{4x + 4}$

5) $-\dfrac{3}{x} \geq 12$

6) $-\dfrac{1}{3 - x} < \dfrac{x}{6 - 2x}$

7) $\dfrac{2x - 8}{4 - 3x} \leq 0$

8) $\dfrac{x^2}{x - 2} > 0$

Esercizio 2.3. Vero o falso?

a. La disequazione $2^x \geq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

b. La disequazione $2^x \leq 0$ è verificata se e solo se $x = 0$

c. La disequazione $e^{-x} \leq 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$

d. La disequazione $(0,2)^x \geq (0,2)^3$ è verificata per ogni $x \geq 3$

e. La disequazione $e^x \leq \frac{1}{e}$ è verificata per ogni $x \leq -1$

Esercizio 2.4. Dimostrare che se x e y sono numeri reali tali che:

$$e^{2x} - e^{2y} = 0$$

allora $x = y$.

Esercizio 2.5 (Bonus)**.** Risolvi la seguente equazione

$$x^3 \cdot 2^x - 8x^3 - 4x \cdot 2^x + 32x = 0$$

(*Suggerimento*: prima di fare calcoli strani, prova a usare le scomposizioni!)

Esercizio 2.6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Se $3^x = 11$ allora $x = \log_{11} 3$;

(b) Se $\log_9 a = -2$ allora $a = (-2)^9$;

(c) $2^{-\frac{1}{3}} = x$ è equivalente a $\log_2 x = -\frac{1}{3}$;

(d) $\log_{-2}(-8) = 3$ perchè $(-2)^3 = -8$;

(e) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$;

(f) la condizione di esistenza dell'equazione $\log_2^2 x - 4 = 0$ è $x < -2 \vee x > 2$.

Esercizio 2.7. Sviluppare le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi:

- $\log_2(\frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}})$
- $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[5]{4}}{8\cdot\sqrt{2}}$
- $\log_5 \frac{5}{61\cdot\sqrt[4]{91}}$

Esercizio 2.8. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

- $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$
- $\frac{\log_2(4^{x+1}-2)+2x}{2x+1} = 1$

Esercizio 2.9. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $y = \dfrac{(x+2)^2}{\ln(1+x)}$

2) $y = \log_3(1 + e^{\frac{x}{3}})$

3) $y = \dfrac{2x}{\ln(x^2-1)} + \dfrac{3}{\sqrt{x+2}} - 2x$

4) $y = \sqrt{4^{3x-x^2-2}}$

3 Funzioni trigonometriche

Disegnare nella circonferenza goniometrica un angolo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$.

a. Individuare gli angoli $(\alpha - \pi)$, $(\alpha + \frac{3}{2}\pi)$, $(-\pi - \alpha)$

b. Considerando $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ noti, calcolare il seno e il coseno degli angoli citati nel punto a.

Esercizio 3.1. Vero o falso?

a. La funzione $\cos(x)$ è sempre positiva nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

b. La funzione $\sin(x)$ è sempre negativa nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

c. La funzione $\tan : (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva.

d. La funzione $\tan : (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva.

e. $\cos \frac{\pi}{3} > \cos -\frac{\pi}{4}$.

f. $\sin -\frac{\pi}{3} \leq \sin \frac{\pi}{6}$.

Esercizio 3.2. Chiamato ϑ l'angolo che la diagonale di un rettangolo forma con uno dei suoi lati, calcolare l'area del rettangolo sapendo che $\cos\vartheta = \frac{3}{5}$ e che il lato più lungo misura 8 cm.

Esercizio 3.3. Risolvere nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ le seguenti disequazioni:

a. $2\cos(x) + 1 \geq 0$

b. $\cos^2(x) \geq 1$

c. $\dfrac{1}{2\cos x - 1} < \dfrac{1}{2\cos x + 1}$

d. $\dfrac{\cos(2x)\sin(x)}{4\sin^2(x) - 3} \leq 0$

Esercizio 3.4. Determinare il dominio e il codominio delle seguenti funzioni studiate per $x \in [-\pi, \pi]$:

1) $y = 1 - \sin \dfrac{1}{x}$

2) $y = 3\tan(x + 1)$

3) $y = \ln(\sin(x))$

4) $y = \sqrt{\cos^2 x - 1}$

4 Limiti e Derivate

Esercizio 4.1. Calcola i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to -2^-} \frac{4x+3}{x^2-4}$

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{3^x \ln(x)}{2+x}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 2^x}{\sqrt{x+4}}$

4) $\lim_{x\to +\infty} (\frac{2^x}{\ln x} + \frac{2}{x})$

Esercizio 4.2 (Forme Indeterminate)**.** Calcola i seguenti limiti usando l'ordine di infiniti o le loro gerarchie:

1) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^6-3x^4}{2x^2-2x+1}$

2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3-4x^2+6}{3x^2-2x+x^3}$

3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}}{x+1}$

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{\ln(x+1)}$

Esercizio 4.3. Calcola la derivata delle seguenti funzioni nei punti indicati affianco usando la definizione (limite del rapporto incrementale):

1. $f(x) = x^3 + 4x + 1, \qquad x_0 = 1$
2. $f(x) = 2x - 1, \qquad x_0 = 6$
3. $f(x) = \frac{3}{x-1}, \qquad x_0 = 4$
4. $f(x) = e^{x-1}, \qquad x_0 = 1$

Esercizio 4.4. Calcolare la derivata nel generico punto delle seguenti funzioni (si sfruttino le derivate note delle funzioni elementari e le proprietà su somma, prodotto, rapporto e funzioni composte):

1) $f(x) = 4x - 9$

2) $f(x) = 2x^3 - x$

3) $f(x) = 3\ln x$

4) $f(x) = 2\sqrt{x}$

5) $f(x) = -x^2 + 4x$

6) $f(x) = \sin(-x)$

7) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

8) $f(x) = \frac{9-x}{x^2-1}$

9) $f(x) = x\cos x$

10) $f(x) = (x-1)e^{-x}$

Bonus) $f(x) = |x|$

Esercizio 4.5. Calcola la derivata destra e la derivata sinistra delle funzioni:

1) $f(x) = \begin{cases} x-3 & se\ x \leq 3 \\ x^2-9 & se\ x > 3 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & se\ x > 0 \\ x^2+x & se\ x \leq 0 \end{cases}$

Esercizio 4.6 (Derivate di funzioni composte)**.** Calcola $f'(x)$ nei seguenti casi:

1) $f(x) = 4\sqrt{3x+2}$

2) $f(x) = 2\ln x - \sqrt[4]{\ln^3 x}$

3) $f(x) = e^{4x} + \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 x$

Esercizio 4.7. Calcola i seguenti limiti che presentano forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x^3 - x^2}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2x}-2}{(x-2)^2}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2-2x}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-x}{2x}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{2\ln x}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{cotg} x}{\ln 2x^3}$

5 Massimi e Minimi relativi, Concavità e Studio di funzione

Esercizio 5.1. Vero o falso?

a. Se $f'(x_0) = 0$, allora $f(x)$ ha in x_0 un punto di massimo o minimo relativo.

b. Una funzione non derivabile in un punto x_0 non può avere un massimo o minimo relativo nel punto.

c. Se la derivata prima di una funzione esiste e non si annulla mai in un intervallo, la funzione non ha massimi o minimi relativi nell'intervallo.

d. Se in un intorno completo del punto x_0 si hanno $f'(x) > 0 \ \forall x \neq x_0$ e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso orizzontale.

e. In un punto di flesso orizzontale le derivate prima e seconda si annullano sempre.

f. Per determinare i flessi di una funzione $f(x)$ basta trovare le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$.

Esercizio 5.2. Determina i punti di massimo/minimo relativo o flesso orizzontale per le seguenti funzioni:

1) $y = x^4 + 2x$

2) $y = \dfrac{x-3}{(x-2)^3}$

3) $y = 2x \ln x - 5x$

4) $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$

Esercizio 5.3. Determina i punti di flesso delle seguenti funzioni:

1) $y = 2x^3 - 8x$

2) $y = 2x + \dfrac{1}{x}$

3) $y = xe^{-x}$

4) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$

Esercizio 5.4. Considera la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$$

dove a è un parametro reale non nullo. Determina i valori di a per i quali $f(x)$ ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti di estremo relativo.

Esercizio 5.5. Trova h e k in modo che la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + hx + 5}{x^2 + 4x + k}$ abbia un punto di massimo in $M = (-2, -1)$.

Esercizio 5.6. Studia le seguenti funzioni e disegnane il grafico. Specificare gli eventuali asintoti, le regioni di positività/negatività, crescenza/decrescenza e concavità/convessità. Trovarne inoltre gli eventuali punti di massimo, minimo, flesso e punti di non derivabilità.

1) $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^3}$

2) $f(x) = \arctan(1+x^2)$

3) $f(x) = e^x(1-|2x-x^2|)$

4) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \sin(2x)$

6) $f(x) = \dfrac{2e^x+4}{e^x-1}$

Esercizio 5.7 (Bonus)**.** Determina i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ risulti continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b & se\ x \geq 0 \\ \frac{1}{2e^x-1} & se\ x < 0 \end{cases}$$

6 Integrali

Esercizio 6.1. Vero o falso?

a. La derivata di $\displaystyle\int (x^2 + 4x)\,dx$ è $2x + 4$.

b. $\displaystyle\int (4x^3 + 7)\,dx = \frac{x^4}{4} + 7x + c$.

c. Una primitiva di $\displaystyle\int x\,dx$ è $\displaystyle\frac{x^3}{6} + 1$.

d. La derivata di $\displaystyle\int (\ln x + 4)\,dx$ è $\ln x$.

e. Una primitiva di $\sin x - \cos x$ è $-\cos x - \sin x - 6$.

f. Se una funzione è integrabile e positiva, tutte le sue primitive sono crescenti.

Esercizio 6.2. Calcolare i seguenti integrali elementari:

1) $\displaystyle\int \frac{7}{2x^5}\,dx$

2) $\displaystyle\int (x^4 + 2x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3)\,dx$

3) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x}{x^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int 5e^x + \frac{1}{x}\,dx$

6) $\displaystyle\int (1 + 2\sin x - \cos x)\,dx$

7) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{x^4}{4 + 4x^2}\,dx$

Esercizio 6.3. Risolvere i seguenti integrali indefiniti di funzioni composte:

1) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$

2) $\displaystyle\int (x + 1)^6\,dx$

3) $\displaystyle\int (2x^3 + x)e^{x^4 + x^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{5x}\,dx$

5) $\displaystyle\int \sin(4x)\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Esercizio 6.4. Utilizzando i metodi di sostituzione o integrazione per parti, calcolare gli integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$

2) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

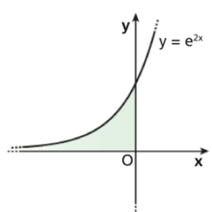
5) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3}{2\sin x}\,dx$

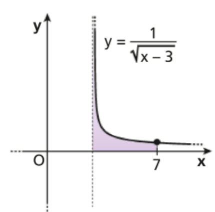
6) $\displaystyle\int \frac{4}{1+\cos x}\,dx$

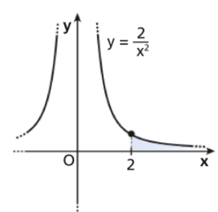
Esercizio 6.5. Risolvere i seguenti integrali definiti (talvolta generalizzati) o problemi riconducibili a un integrale definito:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+3}\,dx$
- Area compresa tra asse x e grafico di $y = x^2 - 9$ nell'intervallo $[0, 2]$ (Attenzione: il grafico è sotto l'asse delle x!)
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$
- Area compresa tra asse x e grafico di $y = e^x - 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$ (Attenzione: parte del grafico è sotto l'asse delle x!)
- Area della regione finita di piano compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 - 3x - 1$

Esercizio 6.6. Verificare che le superfici colorate in figura hanno area finita e calcolarne il valore.







7 Statistica

Esercizio 7.1. Vero o falso? Se lancio una moneta non truccata

a. La probabilità di ottenere due volte di fila testa è più bassa della probabilità di ottenere la prima volta testa e la seconda croce.

b. La probabilità di ottenere 3 teste in 3 lanci è 1/8.

c. Se ottengo otto teste di fila allora la moneta è sicuramente truccata.

d. La probabilità di avere almeno una croce in tre lanci è 7/8.

Esercizio 7.2. Uno studio su un campione di pazienti del pronto soccorso di un ospedale ha osservato di ciascun paziente le seguenti variabili, dire se si tratta di variabili qualitative (ordinate o no), quantitative (discrete o continue).

Paz.	**Età** (anni)	**Sesso**	**Numero di ricoveri passati**	**Fumatore**	**Peso** (kg)	**Codice di gravità**
U001	78	M	1	1	90	giallo
U002	36	M	0	0	78	rosso
U003	85	F	4	1	66	verde
U004	29	F	1	0	59	giallo
...	...	...	...	...	...	...

Esercizio 7.3. Uno studio effettuato sui pazienti di un ospedale che sono affetti da una malattia ha riportato i seguenti risultati nella variabile GRUPPO SANGUIGNO.

$$X = \{0, AB, A, 0, A, B, A, B, A, A, AB, 0, B, A, 0, B, AB, 0, A, A, B,\\ 0, A, B, AB, 0, A, B, A, 0, AB, 0, 0, A, A, AB, A, 0, B, 0\}$$

Rappresentare la tabella delle frequenze assolute, relative e percentuali i dati e rappresentare con il grafico più appropriato.

Esercizio 7.4. É stato osservato che nel mondo ci sono 40% di persone con il gruppo 0, 36% con il gruppo A, 17% con il gruppo B e 7% con il gruppo AB. Effettuare un test per comprendere se la malattia dell'esercizio 7.3 si presenti con più facilità in pazienti con un determinato gruppo sanguigno oppure la distribuzione trovata è coerente con quella mondiale.

Esercizio 7.5. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale di media μ e varianza σ^2 Effettuando un test su 10 individui si trovano le seguenti misure

$$X = \{11, 15, 13, 11, 12, 16, 11, 14, 12, 15\}$$

Vogliamo verificare se questo campione è coerente con una media $\mu = 12$

Esercizio 7.6. Supponiamo di sapere che la varianza della popolazione dell'esercizio sia $\sigma^2 = 1$ possiamo confermare o smentire che la media della popolazione sia $\mu = 12$?

Esercizio 7.7. Si effettua uno studio che si propone di verificare se alcuni generi cinematografici sono preferiti dai maschi rispetto alle femmine. Osservando le preferenze su un campione di 100 individui sono stati osservati i seguenti risultati:

	Giallo	**Avventura**	**Romantico**	**Fantascienza**
M	15	20	5	15
F	15	10	10	10

Effettuare un test statistico che confermi o meno l'ipotesi che il genere cinematografico preferito dipenda dal sesso.