Esercizi sulla Topologia della Retta

Determinare il derivato, la chiusura e la frontiera dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}$, e determinare se questi insiemi sono aperti o chiusi.

1. $A = \left\{ \frac{1}{n+2} : n \in \mathbf{N} \right\}$;
2. $A = (-2, 0] \cup [1, +\infty)$;
3. $A = [-3, 0] \cup \left\{ \frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbf{N} \right\}$;
4. $A = \mathbf{Q} \cap [0, 4]$. Quale teorema di Giusti viene applicato?
5. $A = [0, 2] - \mathbf{Q}$. Quale teorema di Giusti viene applicato?
6. $A = \left\{ \frac{(-1)^{n-1}(n^2+2)}{2n+n^2} : n \in \mathbf{N} \right\}$;
7. $A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbf{N} \right\}$;
8. $A = \left\{ \frac{n^3+4n+5}{5n^2+n} : n \in \mathbf{N} \right\}$;
9. $A = \{ \sqrt[n]{n!} : n \in \mathbf{N} \}$;
10. $A = [0, 2) \cup (2, 5] \cup \{6\}$;
11. $A = \{x \in \mathbf{R} : |x - 5| > 2\}$;
12. $A = \{x \in \mathbf{R} : 1 \leq |x - 1| < 2\}$;
13. $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x + 5| \leq 2\}$;
14. $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x > 2\}$;
15. $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x + |x + 4| \leq 2\}$;
16. $A = \{2, 3, 70\}$;
17. $A = \mathbf{N} \cup (1, 2)$;
18. $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup (1, 3]$;
19. $A = \emptyset$;
20. $A = \mathbf{R}$;
21. $A = \{n^{1993} : n \in \mathbf{N}\}$.

13-12-1992

Esercizi sulla Topologia della Retta: Risultati

1. $A = \left\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbf{N}\right\}$, $\overline{A} = \partial A = \left\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{0\}$, $\mathcal{D}A = \{0\}$; non chiuso, non aperto;
2. $A = (-2, 0] \cup [1, +\infty)$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = [-2, 0] \cup [1, +\infty)$, $\partial A = \{-2, 0, 1\}$; non chiuso, non aperto;
3. $A = \overline{A} = [-3, 0] \cup \left\{\frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbf{N}\right\}$, $\mathcal{D}A = [-3, 0]$, $\partial A = \{-3, 0\} \cup \left\{\frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbf{N}\right\}$; chiuso, non aperto;
4. $A = \mathbf{Q} \cap [0, 4]$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = \partial A = [0, 4]$; non chiuso, non aperto;
5. $A = [0, 2] - \mathbf{Q}$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = \partial A = [0, 2]$; non chiuso, non aperto;
6. $A = \left\{\frac{(-1)^{n-1}(n^2+2)}{2n+n^2} : n \in \mathbf{N}\right\}$, $\overline{A} = \partial A = \left\{\frac{(-1)^{n-1}(n^2+2)}{2n+n^2} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{-1, 1\}$, $\mathcal{D}A = \{-1, 1\}$; non chiuso, non aperto;
7. $A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbf{N}\right\}$, $\overline{A} = \partial A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{e\}$, $\mathcal{D}A = \{e\}$; non chiuso, non aperto;
8. $A = \overline{A} = \partial A = \left\{\frac{n^3+4n+5}{5n^2+n} : n \in \mathbf{N}\right\}$, $\mathcal{D}A = \emptyset$; chiuso, non aperto;
9. $A = \overline{A} = \partial A = \{\sqrt[n]{n!} : n \in \mathbf{N}\}$, $\mathcal{D}A = \emptyset$; chiuso, non aperto;
10. $A = [0, 2) \cup (2, 5] \cup \{6\}$, $\mathcal{D}A = [0, 5]$, $\overline{A} = [0, 5] \cup \{6\}$, $\partial A = \{0, 2, 5, 6\}$; non chiuso, non aperto;
11. $A = \{x \in \mathbf{R} : |x - 5| > 2\} = (-\infty, 3) \cup (7, \infty)$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = (-\infty, 3] \cup [7, \infty)$, $\partial A = \{3, 7\}$; non chiuso, aperto;
12. $A = \{x \in \mathbf{R} : 1 \leq |x - 1| < 2\} = (-1, 0] \cup [2, 3)$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = [-1, 0] \cup [2, 3]$, $\partial A = \{-1, 0, 2, 3\}$; non chiuso, non aperto;
13. $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x + 5| \leq 2\} = [-7, -5) \cup (-5, -3]$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = [-7, -3]$, $\partial A = \{-7, -5, -3\}$; non aperto, non chiuso;
14. $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x > 2\} = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + x \geq 2\} = (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$, $\partial A = \{-2, 1\}$; non chiuso, aperto;
15. $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x + |x + 4| \leq 2\} = (-2, -1]$, $\mathcal{D}A = \overline{A} = [-2, -1]$, $\partial A = \{-2, -1\}$; non chiuso, non aperto;
16. $A = \overline{A} = \partial A = \{2, 3, 70\}$, $\mathcal{D}A = \emptyset$; chiuso, non aperto;
17. $A = \overline{A} = \mathbf{N} \cup (1, 2)$, $\mathcal{D}A = [1, 2]$, $\partial A = \mathbf{N}$; chiuso, non aperto;
18. $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup (1, 3]$; $\mathcal{D}A = [1, 3]$, $\overline{A} = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup [1, 3]$, mentre $\partial A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{1, 3\}$; non chiuso, non aperto;
19. $A = \mathcal{D}A = \overline{A} = \partial A = \emptyset$; chiuso, aperto;
20. $A = \mathcal{D}A = \overline{A} = \mathbf{R}$, $\partial A = \emptyset$; chiuso, aperto;
21. $A = \overline{A} = \partial A = \{n^{1993} : n \in \mathbf{N}\}$, $\mathcal{D}A = \emptyset$; chiuso, non aperto.

15-12-1992