Compito di Analisi Matematica 1, 26-1-1993, Versione 1

1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} \cdot \cos^2(e^{-n}+8)}{n\sqrt{2n+3}+4n-3}.$$

2. (a) Risolvere l'equazione

$$z^3 = -8i,$$

e rappresentare le soluzioni nel piano complesso, e (b) risolvere l'equazione

$$z^2 + (-6+2i)z + (11-10i) = 0.$$

3. Determinare il derivato, la chiusura e la frontiera dell' insieme

$$A = \left\{ \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n} \right)^{n^2+2} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup [e,3].$$

Determinare se A è aperto; determinare se A è chiuso.

4. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n\sqrt{n}} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{2n+2}}.$$

Compito di Analisi Matematica 1, 26-1-1993, Versione 2

1. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{9/7}(2^n+n) \cdot (2 - \operatorname{sen}(e^{-n}+8))}{n^3+e^n}.$$

2. (a) Risolvere l'equazione

$$z^4 = -81,$$

e rappresentare le soluzioni nel piano complesso, e (b) risolvere l'equazione

$$z^2 + (2+2i)z + (-7+26i) = 0.$$

3. Determinare il derivato, la chiusura e la frontiera dell' insieme

$$A = \left\{ \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1} \right)^{n^2-1} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup [e,4).$$

Determinare se A è aperto; determinare se A è chiuso.

4. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2) \cdot \left(\sqrt{n^2+3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}} - \sqrt{n^2+1} \right)}{\sqrt{2n+2}}.$$

Compito di Analisi Matematica 1, Soluzioni, 26-1-1993, Versione 1

1. Per dimostrare la convergenza della serie facciamo lo stima
$$\frac{\sqrt[3]{n}\cdot\cos^2(e^{-n}+8)}{n\sqrt{2n+3}+4n-3} \le \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{2n+3}+4n-3} \le \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{2n}+n}$$
$$\le \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{2n}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{n^{7/6}},$$
mentre $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-7/6}$ è convergente (serie armonica generalizzata con $p=7/6$). Quindi la serie originale è convergente, secondo il criterio del confronto.
2. (a) $z^3=-8i$ ha valore assoluto 8 e argomento $3\pi/2$ ($270°$). Quindi z ha valore assoluto $\sqrt[3]{8}=2$ e argomento $\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}$ per $k=0,1,2$. Risulta
$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}) = 2i,$$
$$z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3}-i,$$
$$z_3 = 2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3}-i.$$
Per risolvere la seconda equazione, completiamo il quadrato:
$$(z-3+i)^2 = -11+10i+(-3+i)^2 = -3+4i = 5(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$
dove $\cos\varphi=-\frac{3}{5}$ e $\mathrm{sen}\,\varphi=\frac{4}{5}$. Applicando le formule
$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\cos\varphi}{2},\ \ \mathrm{sen}^{\,2}\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2},\ \ \mathrm{sen}\,\varphi = 2\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$
otteniamo $\cos\frac{\varphi}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ e dunque
$$z-3+i=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\right)=\pm(1+2i).$$
Quindi $z_1=4+i$ e $z_2=2-3i$.
3. Si vede facilmente che
$$a_n=\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{n^2+2} = \left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^{(n^2+n)\cdot\frac{n^2+2}{n^2+n}} \longrightarrow e^1 = e.$$
Adesso concludiamo che i punti di accumulazione di A sono i punti di $[e,4]$. Quindi $\mathcal{D}A=[e,4]$ Poiché A contiene tutti i suoi punti di accumulazione, A è chiuso e $\overline{A}=A$. Poiché tutti gli a_n sono punti isolati di A, A non può essere aperto. Possiamo osservare che $\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}_{m=1}^{\infty}$ e $\{n^2+n\}_{n=1}^{\infty}$ sono successioni crescenti. Quindi anche la successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ è crescente. Dunque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente con limite e.
4. Facciamo il calcolo
$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{n^2+3n\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{2n+2}}\\
&=\frac{\sqrt{n^2+3n\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{2n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+3n\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+1}}\\
&=\frac{3n\sqrt{n}-1}{\sqrt{2n+2}\,(\sqrt{n^2+3n\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+1})}\\
&=\frac{3-\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}\,\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\\
&\longrightarrow \frac{3}{2\sqrt{2}},\end{aligned}$$

se $n \to +\infty$.

Compito di Analisi Matematica 1, Soluzioni, 26-1-1993, Versione 2

1. Per dimostrare la convergenza della serie facciamo lo stima

$$\begin{aligned}\frac{n^{9/7}(2^n+n)\cdot(1-\operatorname{sen}(e^{-n}+8))}{n^3+e^n} &\leq n^{9/7}\cdot\frac{2^n+n}{n^3+e^n}\cdot 2 \leq n^{9/7}\cdot\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^n+ne^{-n}}{n^3e^{-n}+1}\cdot 2\\ &\leq 2n^{9/7}\cdot\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^n+\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1},\\ &\leq 4n^{9/7}\left(\frac{2}{e}\right)^n \leq 4n^{9/7}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\left(\frac{8}{3e}\right)^n\\ &\leq M\left(\frac{8}{3e}\right)^n,\end{aligned}$$

perché $\{4n^{9/7}\left(\frac{3}{4}\right)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ha limite 0 se $n \to +\infty$ e quindi è limitato superiormente da qualche costante M. Allo stesso momento $\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{8}{3e}\right)^n$ è convergente (serie geometrica con raggione $\frac{8}{3e} < 1$). Quindi la serie originale è convergente, secondo il criterio del confronto.

2. (a) $z^4 = -81$ ha valore assoluto 81 e argomento π (180°). Quindi z ha valore assoluto $\sqrt[4]{81} = 3$ e argomento $\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}$ per $k = 0, 1, 2$. Risulta

$$\begin{aligned} z_1 &= 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}(1+i),\\ z_2 &= 3(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}(-1+i),\\ z_3 &= 3(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}(-1-i),\\ z_3 &= 3(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}(1-i).\end{aligned}$$

Per risolvere la seconda equazione, completiamo il quadro:

$$(z+1+i)^2 = 7-26i+(1+i)^2 = 7-24i = 25(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi),$$

dove $\cos\varphi = \frac{7}{25}$ e $\operatorname{sen}\varphi = -\frac{24}{25}$. Applicando le formule

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{2},\ \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2},\ \operatorname{sen}\varphi = 2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

otteniamo $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \mp\frac{3}{5}$ e dunque

$$z+1+i = 5\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right) = \pm(4-3i).$$

Quindi $z_1 = 3-4i$ e $z_2 = -5+2i$.

3. Si vede facilmente che

$$\begin{aligned} a_n = \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n+1}\right)^{n^2-1} &= \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right)^{n^2-1}\\ &= \left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}^{n-1} \longrightarrow e^{+\infty} = +\infty.\end{aligned}$$

Poichè $\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}_{m=1}^{\infty}$ e $\{n-1\}_{n=1}^{\infty}$ sono successioni crescenti, anche la successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ è crescente. Dunque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente con limite $+\infty$, per cui $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{64}{27} \simeq 2,3704$ e $a_3 = (1,25)^8 \simeq 5,9607$. Poichè $a_1 < a_2 < e$ e $4 < a_3 < a_4 < a_5 < \cdots$, l'intervallo $[e,4]$ non contiene nessun a_n. Adesso concludiamo che i punti di accumulazione di A sono i punti di $[e,4]$. Quindi $\mathcal{D}A = [e,4]$. Poichè A non contiene tutti i suoi punti di accumulazione (cioè $4 \notin A$), A non è chiuso. Comunque $\overline{A} = A \cup \{4\}$. Poichè tutti gli a_n sono punti isolati di A, A non può essere aperto.

4. Facciamo il calcolo

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+2)\left(\sqrt{n^2+3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{2n+2}} \\
&= \frac{(n+2)\left(\sqrt{n^2+3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{2n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}+\sqrt{n^2+1}} \\
&= \frac{(n+2)(3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}-1)}{\sqrt{2n+2}\,(\sqrt{n^2+3\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}+\sqrt{n^2+1})} \\
&= \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3+\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n\sqrt{n}}+\sqrt[3]{\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \longrightarrow \frac{3}{2\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

se $n \to +\infty$.

Compito 2, Analisi 1, 23-3-1993, Versione 1

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)^{1/x^2}.$$
2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}.$$
3. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = x\,e^{\frac{1}{1-|x|}}.$$
Esiste la derivata in $x=0$, e, se esiste, cos'è il suo valore?
4. Determinare, per ogni $x \in \mathbf{R}$, il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n.$$
5. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $(0,+\infty)$, e supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Sia $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Compito 2, Analisi 1, 23-3-1993, Versione 2

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$
2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\{\operatorname{sen} x + \operatorname{arctg}(\ln(1-x))\}}{\operatorname{sen} x - x}.$$

3. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = \sqrt{x}\left|1 + \frac{1}{\ln x}\right|.$$
Esiste la derivata in $x = 1/e$, e, se esiste, cos'è il suo valore?
4. Determinare, per ogni $x \in \mathbf{R}$, il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}} \left(1 - e^{1-x^2}\right)^n.$$
5. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $(0, +\infty)$, e supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Sia $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Compito 2, Analisi 1, 6-4-1993, Versione 3

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)\mathrm{arctg}\, x + x\mathrm{sen}\, x}{\mathrm{arcsen}\, x - 1 + \ln(1-x) + \cos x}.$$
2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{arcsen}\, x)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{(1+x)^{1/\ln(1-x)}\mathrm{sen}\,(x^2)}.$$
3. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{x}{-|x|+3}\, e^{-2|x|}.$$
Esiste la derivata in $x = 0$, e, se esiste, cos'è il suo valore?
4. Determinare, per ogni $x \in \mathbf{R} - \{-1\}$, il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \sqrt{n^2-1}) \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n.$$
5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione per cui
$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$$
per ogni coppia (x, y) di numeri reali. Dimostrare che f è una funzione costante.

Compito 2, 23-3-1993, Analisi 1, Versione 1

1. Prendendo il logaritmo dapprima, si calcoli
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\mathrm{arcsen}\, x}{x}\right)}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{\mathrm{arcsen}\, x}{x}}\cdot\left(\frac{x}{1+x^2} - \mathrm{arcsen}\, x\right)\frac{1}{x^2}}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+x^2} - \mathrm{arcsen}\, x}{\mathrm{arcsen}\, x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(1-x^2+O(x^4)) - (x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5))}{x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + O(x^5)}{x + O(x^3)} = 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al primo passo. Una dimostrazione alternativa prosegue così:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}} \cdot \left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arcsen} x\right)\frac{1}{x^2}}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arcsen} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \{(1-x^2)-(1+x^2)\} = 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al primo e terzo passo. Finalmente,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)^{1/lnx} = e^0 = 1,$$

perchè la funzione esponenziale è continua.

2. Si calcoli

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-x^4} - \sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-2x^3}{\sqrt{2x-x^4}} - \frac{1}{3}x^{-2/3}}{-\frac{3}{4}x^{-1/4}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^{1/4}(x-2x^3) - \frac{1}{3}x^{-5/12}\sqrt{2x-x^4}}{-\frac{3}{4}\sqrt{2x-x^4}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3}(x-2x^3) - \frac{1}{3}\sqrt{2x-x^4}}{-\frac{3}{4}\sqrt{2x-x^4}} = \frac{-16}{9},
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al primo passo.

3. La funzione $f(x) = x \cdot e^{1/(1-|x|)}$ è dispari. C'è un singolo zero in $x = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$, $f(x)$ non è definito in $x = \pm 1$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= 0, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty; \\
\lim_{x\to (-1)^-} f(x) &= 0, \qquad \lim_{x\to (-1)^+} f(x) = -\infty.
\end{aligned}$$

Quindi $x = \pm 1$ sono asintoti verticali.

Ovviamente

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/(1-|x|)} = 1,$$

mentre

$$f(x) - x = x\left(e^{1/(1-|x|)} - 1\right) = x\left(\frac{1}{1-|x|} + O\left(\left(\frac{1}{1-|x|}\right)^2\right)\right), \qquad x \to \pm\infty,$$

cosicchè $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = -1$ e $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-x] = 1$. Vediamo facilmente che $y = x-1$ [se $x \to +\infty$] e $y = x+1$ [se $x \to -\infty$] sono gli asintoti obliqui della funzione.

Poichè $f(x)$ è dispari, la sua derivata è una funzione pari. Dunque basterà calcolare la derivata per $x > 0$. Risulta

$$f'(x) = \frac{1-|x|+x^2}{(1-|x|)^2}\, e^{1/(1-|x|)}, \qquad x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}.$$

Per $x = 0$ risulta

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = e^{1/(1-|x|)} \to e, \qquad x \to 0.$$

Quindi $f'(0)$ esiste e $f'(0) = e$. Inoltre, $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, cosicchè f è una funzione crescente.

Poichè $f(x)$ è dispari, la sua seconda derivata è una funzione dispari. Dunque basterà calcolare la derivata per $x > 0$. Risulta

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{2-|x|}{(1-|x|)^4} \cdot e^{1/(1-|x|)}, \qquad x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\},$$

dove $\operatorname{sgn}(x) = 1$ per $x > 0$ e $\operatorname{sgn}(x) = -1$ per $x < 0$. Quindi gli zeri di f'' sono ± 2. Osserviamo che $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (0,1) \cup (1,2)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (2,+\infty)$. Quindi f è convessa in $(-\infty,-2) \cup (0,1) \cup (1,2)$ e concava in $(-2,-1) \cup (-1,0) \cup (2,+\infty)$. I punti $(2, \frac{2}{e})$ e $(-2, -\frac{2}{e})$ sono flessi. Inoltre, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2e$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2e$. Dunque in $x = 0$ la funzione si cambia da una funzione convessa in una concava, ma la seconda derivata non esiste per $x = 0$.

4. Sia $a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)}$ e $z = \frac{2x}{x^2+1}$. Allora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1,$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al penultimo passo. Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente se $-1 < z < 1$ e divergente $z < -1$ oppure $z > 1$. Per $z = -1$ questa serie è convergente come una consequenza del criterio di Leibnitz. Poichè

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)k}$$

è ovviamente divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è divergente se $z = 1$. Quindi questa serie è convergente ma non è assolutamente convergente se $z = -1$. Finalmente, studiando $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ vediamo che f ha l'asintoto orizzontale $y = 0$, il massimo $(1,1)$, il minimo $(-1,-1)$, e lo zero $x = 0$. Quindi $-1 < f(x) < 1$ se $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$. Concludiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x)^n$ è assolutamente convergente per $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, è divergente per $x = 1$, e convergente ma non assolutamente convergente per $x = -1$.

5. Sia $x > 0$. Applicando il teorema del valor medio su f in $(x, x+1)$, troviamo $\xi \in (x, x+1)$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = g(x).$$

Se $x \to +\infty$, anche $\xi \to +\infty$ e $f'(\xi) \to 0$. Dunque $g(x) \to 0$ se $x \to +\infty$.

Compito 2, 23-3-1993, Analisi 1, Versione 2

1. Prendendo il logaritmo risulta

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)}{\ln x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} \cdot \frac{-1}{1+x^2}}{1/x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}(1/x)} = -\lim_{x \to 0} \frac{z}{\operatorname{arctg} z} = -1,
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al primo ed all' ultimo passo. Un'altra dimostrazione è così:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)}{\ln x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} \cdot \frac{-1}{1+x^2}}{1/x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1/x}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1/x}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} \\
&= -\lim_{x \to +\infty} \frac{1/x^2}{\frac{-1}{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{-x^2} = -1,
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al primo e quinto passo. Finalmente, prendendo l'esponenziale e applicando la continuità dell' esponenziale si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{1/\ln x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

2. Si calcoli facilmente

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\operatorname{sen} x + \operatorname{arctg}(\ln(1-x)))}{\operatorname{sen} x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}[\operatorname{sen} x + \operatorname{arctg}(\ln(1-x))]}{\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2x}[\cos x - \frac{1}{(1-x)[1+\ln^2(1-x)]}}{\frac{\cos x - 1}{3x^2}} = 3\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}[1-(\cos x)(1-x)[1+\ln^2(1-x)]]$$

$$= 3\lim_{x\to 0} \left\{[(\operatorname{sen} x)(1-x) + \cos x]\,[1+\ln^2(1-x)] + (\cos x)(1-x)\frac{2\ln(1-x)}{1-x}\right\} = 3,$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al secondo passo (separatemente nel numeratore e denominatore), terzo passo (due volte nel denominatore) e quarto passo. Un' altra dimostrazione prosegue cosı̀:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\operatorname{sen} x + \operatorname{arctg}(\ln(1-x)))}{\operatorname{sen} x - x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left\{[x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)] - \operatorname{arctg}(x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3))\right\}}{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left\{[x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)] - [x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)] + \frac{1}{3}[x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)]^3 + O(x^5)\right\}}{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x[-\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)]}{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + O(x^2)}{-\frac{1}{6} + O(x^2)} = 3.$$

3. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x}\,\left|1 + \frac{1}{\ln x}\right|$ è $(0,1) \cup (1,+\infty)$. L'unico zero è $x = (1/e)$ quando $\ln x = -1$, mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. La funzione è sempre non negativa. L'unico asintoto verticale del grafico è $x = 1$. Non ci sono altri asintoti.

Per $0 < x < (1/e)$ e $x > 1$ la derivata è uguale a

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 2)(\ln x - 1)}{2\sqrt{x} \cdot \ln^2 x},$$

mentre per $(1/e) < x < 1$ si ha

$$f'(x) = -\frac{(\ln x + 2)(\ln x - 1)}{2\sqrt{x} \cdot \ln^2 x}.$$

Quindi $f'(x) > 0$ in $(0, e^{-2}) \cup (e^{-1}, 1) \cup (e, +\infty)$, $f'(x) < 0$ in $(e^{-2}, e^{-1}) \cup (1, e)$, e $f(1/e^2) = f(e) = 0$. Dunque f è crescente in $(0, e^{-2}) \cup (e^{-1}, 1) \cup (e, +\infty)$ e decrescente in $(e^{-2}, e^{-1}) \cup (1, e)$. Inoltre, c'è un massimo in $(e^{-2}, (2e)^{-1})$ e un minimo in $(e^{-1}, 0)$ e $(e, 2\sqrt{e})$.

Per $0 < x < (1/e)$ e $x > 1$ la seconda derivata è uguale a

$$f''(x) = -\frac{\ln^3 x + \ln^2 x - 8}{4x\sqrt{x} \cdot \ln^3 x},$$

mentre per $(1/e) < x < 1$ si ha

$$f''(x) = \frac{\ln^3 x + \ln^2 x - 8}{4x\sqrt{x} \cdot \ln^3 x}.$$

Studiando $g(z) = z^3 + z^2 - 8$ [massimo: $g(-\frac{2}{3}) = -8 + \frac{4}{27} < 0$; minimo: $g(0) = -8 < 0$; $g(1) = -6$; $g(2) = 4 > 0$] vediamo che esiste un' unico $z_0 \in (1,2)$ tale che $f''(e^{z_0}) = 0$. Quindi $f''(x) > 0$ in $(e^{-1}, 1) \cup (1, e^{z_0})$, $f''(x) < 0$ in $(0, e^{-1}) \cup (e^{z_0}, +\infty)$. Dunque f è convessa in $(e^{-1}, 1) \cup (1, e^{z_0})$ e concava in $(0, e^{-1}) \cup (e^{z_0}, +\infty)$. Inoltre, c'è un flesso in $(e^{z_0}, e^{z_0/2}(1 + \frac{1}{z_0}))$.

Per aiutarci traaciare il grafico si calcolino

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to (1/e)^-} f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{e}};$$

$$\lim_{x\to (1/e)^+} f'(x) = \frac{+1}{\sqrt{e}}, \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty.$$

Dunque non esiste la derivata in $x = (1/e)$.
4. Sia $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$ e $z = 1 - e^{1-x^2}$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}} = 1,$$

dove abbiamo applicato De L'Hôpital al penultimo passo. Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente se $-1 < z < 1$ e divergente $z < -1$ oppure $z > 1$. Per $z = -1$ questa serie è convergente come una consequenza del criterio di Leibnitz. Poichè

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)\sqrt{k}}$$

è ovviamente divergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è divergente se $z = 1$. Quindi questa serie è convergente ma non è assolutamente convergente se $z = -1$. Finalmente, studiando $f(x) = 1 - e^{1-x^2}$ vediamo che f ha l'asintoto orizzontale $y = 1$, il minimo $(0, 1-e)$, e gli zeri ± 1, Anche $f(x) = -1$ se e solo se $x = \pm\sqrt{1 - \ln 2}$. Quindi $-1 < f(x) < 1$ se $x < -\sqrt{1-\ln 2}$ oppure $x > \sqrt{1 - \ln 2}$, $f(x) < -1$ per $-\sqrt{1-\ln 2} < x < \sqrt{1-\ln 2}$, e $f(x) \geq 1$ per nessun x. Concludiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x)^n$ è assolutamente convergente per $x \in (-\infty, -\sqrt{1-\ln 2}) \cup (\sqrt{1-\ln 2}, +\infty)$, è divergente per $x \in (-\sqrt{1-\ln 2}, \sqrt{1-\ln 2})$, e convergente ma non assolutamente convergente per $x = \pm\sqrt{1-\ln 2}$.
5. Sia $x > 0$. Applicando il teorema del valor medio su f in $(x, x+1)$, troviamo $\xi \in (x, x+1)$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = g(x).$$

Se $x \to +\infty$, anche $\xi \to +\infty$ e $f'(\xi) \to 0$. Dunque $g(x) \to 0$ se $x \to +\infty$.

Compito 3, Analisi Matematica 1, Versione 1, 13-5-1993

1. Usando l'integrazione per parti oppure un' altro metodo, calcolare l'integrale indefinito
$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 9})\, dx.$$
2. Calcolare l'area fra i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$.
3. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2 + 2x}}$$
supposto che l'intervallo di integrazione sia un sottointervallo compatto di $(0, +\infty)$. È convergente l'integrale generalizzato
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2 + 2x}},$$
e, se è convergente, cos'è il suo valore?
4. Calcolare l'integrale definito
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}$$
per le costanti $a, b > 0$.
5. Determinare il carattere dell' integrale generalizzato
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\ln^3(x^2 + 4) \cdot \sqrt{x^2 + 4}}\, dx.$$

Compito 3, Analisi Matematica 1, Versione 2, 13-5-1993

1. Usando l'integrazione per parti oppure un' altro metodo, calcolare l'integrale indefinito
$$\int \ln(-x+\sqrt{x^2+4})\,dx.$$
2. Calcolare l'area fra i grafici delle funzioni $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)$.
3. Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}$$
supposto che l'intervallo di integrazione sia un sottointervallo compatto di $(0,+\infty)$. È convergente l'integrale generalizzato
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}},$$
e, se è convergente, cos'è il suo valore?
4. Calcolare l'integrale definito
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}$$
per le costanti $a, b > 0$.
5. Determinare il carattere dell' integrale generalizzato
$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\ln^2(x^3+8)\cdot\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Compito 3, Soluzioni, Versione 1, 13-5-1993

1. Si ha
$$\int 1\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+9})\,dx = x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+9}) - \int x\cdot\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{x+\sqrt{x^2+9}}\,dx$$
$$= x\ln(x+\sqrt{x^2+9}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+9}) - \sqrt{x^2+9} + \text{cost}.$$
2. I punti di intersezione dei grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ sono $(-1,0)$ e $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ e $f(x) \ge g(x)$ per $x \in (-1,\frac{3}{5})$. Quindi l'area è uguale all' espressione
$$\int_{-1}^{3/5}\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(x+1)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{3/5}$$
$$= -\frac{2}{5} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(\frac{3}{5}).$$
Si può risolvere l'esercizio anche geometricamente. Infatti, se $\alpha = \operatorname{arcsen}(4/5)$, si ha $A = \frac{1}{2}(\pi-\alpha) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi-\alpha)$.
3. Sostituiamo $t = -x+\sqrt{x^2+2x}$, cioè $(x+t)^2 = x^2+2x$, $x = \frac{t^2}{2(1-t)}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{t(2-t)}{2(t-1)^2}$, $\sqrt{x^2+2x} = \frac{t(2-t)}{2(1-t)}$ e $x+1 = \frac{t^2-2t+2}{2(1-t)}$. Allora
$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x}} = -2\int \frac{2t-2}{(t^2-2t+2)^2}\,dt$$
$$= \frac{2}{t^2-2t+2} = \frac{1}{(x+1)\{x+1-\sqrt{x^2+2x}\}} + \text{cost}_1 = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1} + \text{cost}_2,$$

dove $\text{cost}_2 = 1 + \text{cost}_1$. Quindi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x}} = \int_0^1 \frac{-2(2t-2)}{(t^2-2t+2)^2}\,dt = \left[\frac{2}{t^2-2t+2}\right]_0^1 = 1.$$

Si risolve quest' esercizio anche usando una delle sostituzioni $x = -1 + \cosh t$ o $t = 1/(x+1)$.

4. Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\text{sen}^2 x + b^2\cos^2 x} &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2\text{tg}^2 x + b^2}\,\frac{dx}{\cos^2 x}\\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{ab}\int_0^\infty \frac{d(at/b)}{(at/b)^2+1} = \frac{\pi}{2ab}.\end{aligned}$$

5. Per $x > 2$ si ha la stima

$$0 \le \frac{\text{sen}^2 x}{\ln^3(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}} \le \frac{1}{8x\ln^3(x)},$$

mentre $\int_2^c \frac{1}{8x\ln^3(x)}\,dx = [\frac{-1}{4\ln^2(x)}]_2^c$ ha un limite finito se $c \to +\infty$. Quindi l'integrale è convergente.

Compito 3, Soluzioni, Versione 2, 13-5-1993

1. Si ha

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\ln(-x+\sqrt{x^2+4})\,dx &= x\cdot\ln(-x+\sqrt{x^2+4}) - \int x\cdot\frac{-1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{-x+\sqrt{x^2+4}}\,dx\\ &= x\ln(-x+\sqrt{x^2+4}) + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = x\ln(-x+\sqrt{x^2+4}) + \sqrt{x^2+4} + \text{cost}.\end{aligned}$$

2. I punti di intersezione dei grafici delle funzioni $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)$ sono $(1,0)$ e $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$ e $f(x) \le g(x)$ per $x \in (-\frac{4}{5},1)$. Quindi l'area è uguale all' espressione

$$\begin{aligned}&\int_{-4/5}^1 \left(-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(x-1)\right)dx = \left[-\frac{1}{2}\{x\sqrt{1-x^2}+\text{arcsen}\,(x)\} + \frac{x^2-2x}{6}\right]_{-4/5}^1\\ &= -\frac{39}{50} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{arcsen}\,(\frac{4}{5}).\end{aligned}$$

Si può risolvere l'esercizio anche geometricamente. Infatti, se $\alpha = \text{arcsen}\,(3/5)$, si ha $A = \frac{1}{2}(\pi-\alpha) - \frac{1}{2}\text{sen}\,(\pi-\alpha)$.

3. Sostituiamo $t = -x + \sqrt{x^2+x+1}$, cioè $(x+t)^2 = x^2+x+1$, $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}$, $\sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-t+1}{2t-1}$ e $2x+1 = \frac{2t^2-2t-1}{1-2t}$. Allora

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} &= -\int \frac{4t-2}{(2t^2-2t-1)^2}\,dt = \frac{1}{2t^2-2t-1} + \text{cost}_1\\ &= \frac{1}{(2x+1)\{2x+1-2\sqrt{x^2+x+1}\}} + \text{cost}_1 = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1} + \text{cost}_2,\end{aligned}$$

dove $\text{cost}_2 = \frac{1}{3} + \text{cost}_1$. Quindi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} = \int_{1/2}^1 \frac{4t-2}{(2t^2-2t-1)^2}\,dt = \left[\frac{-1}{2t^2-2t-1}\right]_{1/2}^1 = \frac{1}{3}.$$

Si risolve quest' esercizio anche usando una delle sostituzioni $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{senh}\,t$ o $t = \sqrt{3}/(2x+1)$.

4. Si ha

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \mathrm{sen}^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2 \mathrm{cotg}^2 x + b^2} \frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x}$$
$$= -\int_\infty^0 \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{ab}\int_0^\infty \frac{d(at/b)}{(at/b)^2+1} = \frac{\pi}{2ab}.$$

5. Per $x > 2$ si ha la stima

$$0 \le \frac{1-\cos x}{\ln^2(x^3+8)\cdot\sqrt{x^2+1}} \le \frac{2}{9x\ln^2(x)},$$

mentre $\int_2^c \frac{2}{9x\ln^2(x)}\,dx = [\frac{-2}{9\ln(x)}]_2^c$ ha un limite finito se $c \to +\infty$. Quindi l'integrale è convergente.