Analisi Matematica 1, F/I, Scritto Generale, 13-6-1997

1. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u'(t) = \frac{u(t)e^{2t}}{1+e^{2t}}.$$

Qual'è la soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa la condizione $u(\ln 3) = 0$?

2. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + 3\,\cos^2 n + n\,2^{-n}}{n^3 - |\mathrm{sen}\,(n^2)| + 4} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{3n}.$$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\cos(1/x)} - 2x^2\right) \frac{x + \mathrm{sen}\,(x)}{-\cos(x) + 2x}.$$

4. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}.$$

5. Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{(2\,\mathrm{sen}\,x - 1)(1+\cos x)}}.$$

$$\mathrm{sen}\,15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \qquad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \mathrm{tg}\,15^\circ = 2-\sqrt{3}, \qquad \mathrm{cotg}\,15^\circ = 2+\sqrt{3}.$$