Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 26-5-1993

1. Risolvere l'equazione
$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0,$$
e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.
2. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1+2z)^n}{(\sqrt{n}\,\ln n)^{1+z}},$$
dove $z \in [0, \infty)$ è un parametro. Discutere, per ogni $z \geq 0$, se la serie diverge, converge assolutamente, o converge non assolutamente.
3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 3} \left(1 + \sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}\right)^{1/\mathrm{tg}\,(x^2-9)}.$$
4. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{|x|}}.$$
È derivabile in $x = -1$?
5. Calcolare
$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\, \frac{dx}{x^2-1}.$$
È convergente l'integrale generalizzato
$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\, \frac{dx}{x^2-1},$$
e, se è convergente, cos'è il suo valore?

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 16-6-1993

1. Risolvere l'equazione
$$z^6 + 64 = 0,$$
e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.
2. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[2 - \cos(1/\sqrt{n})\right]^{-2n^2} \left(\frac{-ez}{z+1}\right)^n,$$
dove z è un parametro. Discutere, per ogni z, se la serie diverge, converge assolutamente, o converge non assolutamente.
3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 2} \left(2 + \sqrt{x+14} - 3\sqrt{x+2}\right)^{1/\ln(x^2-3)}.$$
4. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x+1}}.$$
5. Calcolare
$$\int \frac{1}{\left[x + \sqrt{x^2+x+1}\right]^2}\, dx.$$

È convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left[x+\sqrt{x^2+x+1}\right]^2}\,dx,$$

e, se è convergente, cos'è il suo valore?

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 29-6-1993

1. Risolvere l'equazione

$$\overline{z}^3 = -8i$$

e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare, per ogni $z \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^n.$$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{n^3-1}{n^2}\right)^n.$$

4. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x\,e^{1/(1-x^2)}.$$

5. Calcolare l'integrale

$$\int e^{-3x}\operatorname{arctg}(e^{-x})\,dx.$$

Determinare se è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty e^{-3x}\operatorname{arctg}(e^{-x})\,dx,$$

e se è convergente, determinare il suo valore.

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 7-7-1993

1. Risolvere l'equazione

$$z^4-(1+i)z^2+i=0,$$

e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare, per ogni $z \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\left(\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)^4}{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^n.$$

Distinguere fra la convergenza assoluta e la convergenza semplice.

3. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n^3}{n^2+1}+\frac{n^3-1}{n^2}\right)^{2n+1}.$$

4. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x)=x\,e^{1/(1-x^2)}.$$

5. Determinare se è convergente l'integrale generalizzato
$$\int_0^\infty e^{-3x}\mathrm{arctg}\,(e^{-x})\,dx,$$
e se è convergente, determinare il suo valore.

Soluzioni, Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 7-7-1993

1. Riscriviamo l'equazione nella forma
$$\left(z^2-\frac{1+i}{2}\right)^2=\left(\frac{1-i}{2}\right)^2,$$
otteniamo
$$z^2=\frac{1+i}{2}\pm\frac{1-i}{2}\in\{1,i\}.$$
Quindi $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}$ e $z_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{2}$.

2. Siano
$$a_n=\frac{\left(\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)^4}{\mathrm{sen}\,(\frac{1}{n})},\qquad w(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}.$$
Allora, se $n\to+\infty$, si ha
$$a_n=\frac{(n^{-1/2}+O(n^{-1}))^4}{n^{-1}+O(n^{-2})}=\frac{1}{n}+O(n^{-3/2}).$$
Quindi $a_n^{1/n}\to 1$ se $n\to+\infty$. Dunque $\sum_{n=1}^\infty a_n w(z)^n$ converge assolutamente se $|w(z)|<1$ e diverge se $|w(z)|>1$. Ma $-1<w(z)<1$ per ogni $z\neq 0$ in $\mathbb{R}$ e $w(0)=-1$. Quindi la serie converge assolutamente per ogni $z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Per $z=0$ la serie diventa $\sum_{n=1}^\infty(-1)^n a_n$, quindi è alternata. La sua convergenza segue dal criterio di Leibnitz. Poichè $a_n=\frac{1}{n}+O(n^{-3/2}$, la convergenza non è assoluta. Infatti, poichè $f(x)=\frac{(\ln(1+x))^4}{\mathrm{sen}\,(x^2)}=x^2-2x^3+O(x^4)$, questa funzione ha un minimo in $x=0$, e quindi $a_n=f(n^{-1/2})$ è decrescente.

3. Si ha
$$\left(1-\frac{n^3}{n^2+1}+\frac{n^3-1}{n^2}\right)^{2n+1}=\left(1+\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right)^{2n+1}\to e^2$$
se $n\to+\infty$.

4. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x)=x\,e^{1/(1-x^2)}.$$

5. Determinare se è convergente l'integrale generalizzato
$$\int_0^\infty e^{-3x}\mathrm{arctg}\,(e^{-x})\,dx,$$

e se è convergente, determinare il suo valore.

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 24-9-1993

1. Risolvere l'equazione

$$i\,z^6 = -8i,$$

e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare, per ogni $z \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\ln(n+1)\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{2-z}{z+2}\right)^n .$$

Distinguere fra la convergenza assoluta e la convergenza semplice.

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1+\sqrt[3]{1-3x}+x+x^2}{x^3}.$$

4. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{1-x}.$$

Si ha $f''(x) = \frac{-4(x^2+6x+3)}{9(x-1)(1-x^2)^{5/3}}$.

5. Determinare se è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\left[x+\sqrt{x^2+2x+2}\right]^2},$$

e se è convergente, determinare il suo valore.

L'ultimo giorno per l'orale: 22 ottobre 1993

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 24-3-1994

1. Risolvere l'equazione

$$z^6 = 8,$$

e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare, per ogni $z \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n^2+3)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{1-z}{z+1}\right)^n .$$

Distinguere fra la convergenza assoluta e la convergenza semplice.

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1+\sqrt[3]{1+3x}-x+x^2}{x^3}.$$

4. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

5. Determinare se è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left[x+\sqrt{x^2+2x+2}\right]^2},$$

e se è convergente, determinare il suo valore.

L'ultimo giorno per l'orale: 30 aprile 1994

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 20-10-1993

1. Risolvere l'equazione

$$z^6 + (i-8)z^3 - 8i = 0,$$

e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.

2. Determinare, per ogni $z \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n} \left(\frac{4z-8}{6+3z}\right)^n.$$

Distinguere fra la convergenza assoluta e la convergenza semplice.

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{(\operatorname{tg}^2 x)\ln(1+x) - x + \operatorname{sen} x}.$$

4. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (2-x)e^{x/(x+2)}.$$

5. Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{4}{9}}^{4} \sqrt[3]{\frac{4-x}{x}}\,\frac{dx}{x}.$$

L'ultimo giorno per l'orale: 26 novembre 1993

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 16-11-1993

1. Risolvere l'equazione

$$(|z|^4 z^4 + 256)(z^4 - |z|^2 - 2) = 0.$$

2. Determinare, per ogni $z \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\operatorname{arctg}(1/n^2)}{\sqrt{n^2+1}} \left(\frac{z^2-4}{z^2+2}\right)^n.$$

Distinguere fra la convergenza assoluta e la convergenza semplice.

3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\operatorname{sen}\left(-1+\sqrt{x+1+x^2}\right)}.$$

4. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}.$$

5. Calcolare l'integrale
$$\int_0^\pi \frac{1+2\cos^2 x}{1+2\sin^2 x}\,dx.$$

L'ultimo giorno per l'orale: 17 dicembre 1993

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 14-12-1993

1. Risolvere l'equazione
$$81z^4+9z^2+1=0,$$
e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.
2. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-2+z)^n}{(\sqrt{n+1}\,\ln(n+1))^{1+z}},$$
dove $z\in[0,\infty)$ è un parametro. Discutere, per ogni $z\geq 0$, se la serie diverge, converge assolutamente, o converge non assolutamente.
3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+x\operatorname{sen}x}{1+x}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(1/x)}-\sqrt{1-\operatorname{tg}(1/x)}}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(1/x))}.$$
4. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x)=\frac{xe^{-2x}}{2x-1}.$$
5. Calcolare l'integrale
$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-2x-3}}.$$

   È convergente l'integrale generalizzato
$$\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-2x-3}}?$$

Scadenza per gli orali: 14-1-1994

Prova Scritta, Analisi Matematica 1, 25-2-1994

1. Risolvere l'equazione
$$z^6+19iz^3+216=0,$$

e rappresentare le sue soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3(2n)} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n .$$
Discutere, per ogni $z \geq 1$, se la serie diverge, converge assolutamente, o converge non assolutamente.

3. Calcolare il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{1-\frac{x^2}{3}} - \operatorname{sen}(x)\right)}{1-\cos(x^3)}.$$
Si consiglia l'uso dello sviluppo $(1+z)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + O(z^3)$, $z \to 0$.

4. Tracciare il grafico della funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2}}.$$

5. Calcolare l'integrale generalizzato
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x+1+\sqrt{x^2+4x+13}\right)^2}.$$

Scadenza per gli orali: 30-4-1994