TEOREMA (di Abel) *Supponiamo che la serie di potenze*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad -r < x < r, \tag{*}$$

converga per $x = r$. *Allora la serie* [*] *converge uniformemente in* $x \in [c, r]$ *per ogni* $c \in (-r, r)$, *e quindi*

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Dimostrazione. Siano $c_k = a_k r^k$ e $z = x/r$. Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ è convergente. Sia $s_n = c_0 + \cdots + c_n$, $s_{-1} = 0$, e $s = \lim_{n \to \infty} s_n$. Dato $\epsilon > 0$, scegliamo ν in modo tale che $n > \nu$ implichi

$$|s - s_{n-1}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Per $0 \leq z < 1$, $n > \nu$ e $p \in \mathbf{N}$ si calcoli

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=n}^{n+p} c_k z^k \right| = \left| \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) z^k \right| \leq \\
&\leq \left| \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) z^{k-n} \right| = \left| \sum_{k=0}^{p} (s_{n+k} - s_{n+k-1}) z^k \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{p} s_{n+k} z^k - z \sum_{k=0}^{p} s_{n+k-1} z^{k-1} \right| = \left| \sum_{k=0}^{p} s_{n+k} z^k - z \sum_{k=0}^{p-1} s_{n+k-1} z^{k-1} - s_{n-1} \right| = \\
&= \left| s_{n+p} z^p + (1-z) \sum_{k=0}^{p-1} s_{n+k} z^k - s_{n-1} \right| = \\
&= \left| s_{n+p} z^p + (1-z^p) s + (1-z) \sum_{k=0}^{p-1} (s_{n+k} - s) z^k - s_{n-1} \right| = \\
&= \left| (s_{n+p} - s) z^p + (s - s_{n-1}) + (1-z) \sum_{k=0}^{p-1} (s_{n+k} - s) z^k \right| \leq \\
&\leq |s_{n+p} - s| + |s - s_{n-1}| + \left((1-z) \sum_{k=0}^{p-1} z^k \right) \sup_{k \in \mathbf{N}} |s_{n+k} - s| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Questa stima vale anche per $z = 1$. Quindi le somme parziali della serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ sono i termini di una successione di Cauchy nello spazio $C[0,1]$ delle funzioni continue $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$. Siccome la norma dello spazio di Banach $C[0,1]$ è completa, questa serie converge uniformemente in $[0,1]$. Poiché essa, come è noto, converge uniformemente in z anche su ogni compatto di $(-1,1)$, si deduce la sua convergenza uniforme in $z \in [d,1]$ per ogni $d \in (-1,1)$.

Concludiamo che la serie in [*] converge uniformemente in $x \in [c, r]$ per ogni $c \in (-r, r)$.

Esempio. Consideriamo

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} x^{2k+1}, \qquad -1 < x < 1.$$

Allora la serie è anche convergente per $x = 1$, secondo il criterio di Leibnitz. Il teorema di Abel implica che la somma per $x = 1$ vale $\operatorname{arctg} 1 = (\pi/4)$.

L. Amerio, *Analisi Matematica*, Vol. 2, Tamburini, Milano, 1973.

W. Rudin, *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill, Milano ecc., 1991; *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1964; Teorema 8.2.