EQUAZIONE DI CLAIRAUT

Prerequisiti: esistenza e unicità per le equazioni differenziali in forma esplicita; teorema del Dini.

Un'equazione differenziale della forma

$$u = t\,u' + \phi(u') \tag{1.1}$$

si chiama *equazione di Clairaut*. Supporremo che la funzione ϕ sia definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}$ e di classe $C^2(A)$. In primo luogo, è facile verificare che le funzioni $u(t) = c\,t + \phi(c)$, con una qualunque costante $c \in A$, sono soluzioni della (1.1). Vogliamo dimostrare che, se $\phi'' \neq 0$ in A, allora esistono soluzioni che non sono funzioni polinomiali di grado 1. Posto $F(t, u, u') = u - t\,u' - \phi(u')$, l'equazione (1.1) si scrive

$$F(t, u, u') = 0. \tag{1.2}$$

Se per una terna $(t_0, u_0, u_0') \in \mathbb{R}^3$ si ha $F(t_0, u_0, u_0') = 0$ e $F_{u'}(t_0, u_0, u_0') \neq 0$, mostreremo che l'unica soluzione di (1.2), con le condizioni $u(t_0) = u_0$ e $u'(t_0) = u_0'$, è la $u(t) = u_0'\,t + \phi(u_0')$. Infatti si può applicare il teorema del Dini ed affermare che esiste una funzione $f(t, u)$ tale che $f(t_0, u_0) = u_0'$ e $F\big(t, u, f(t, u)\big) = 0$ in un opportuno intorno del punto (t_0, u_0). Mediante la funzione f, l'equazione (1.2) può essere scritta nella forma esplicita $u' = f(t, u)$, e il problema

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione. Si noti che in corrispondenza di un'altra terna $(t_0, u_0, \bar{u}_0')$, soddisfacente $F(t_0, u_0, \bar{u}_0') = 0$ e $F_{u'}(t_0, u_0, \bar{u}_0') \neq 0$, si ottiene una diversa funzione $\bar{f}$.

Pertanto soluzioni $u = u(t)$ che non siano polinomi di grado 1, se esistono, soddisfano non solo la (1.2), ma anche la condizione $F_{u'}(t, u, u') = 0$. Studiamo allora il luogo dei punti $(t, u, u') \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} F(t, u, u') = 0, \\ \\ F_{u'}(t, u, u') = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Se esiste una terna (t_0, u_0, u_0') che soddisfa il sistema (1.3) allora possiamo applicare ancora una volta il teorema del Dini: infatti si ha

$$\begin{vmatrix} F_t & F_u \\ F_{tu'} & F_{uu'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -u' & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Esistono dunque due funzioni $t = t(s)$ e $u = \tilde{u}(s)$ tali che

$$\begin{cases} F\big(t(s), \tilde{u}(s), s\big) = 0, \\ F_{u'}\big(t(s), \tilde{u}(s), s\big) = 0, \\ t(u_0') = t_0, \quad \tilde{u}(u_0') = u_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ci chiediamo ora se l'insieme $\{\, (t, u) \mid t = t(s),\ u = \tilde{u}(s) \,\}$ è il grafico di una funzione $u = u(t)$. L'uguaglianza $F_{u'}\big(t(s), u(s), s\big) = 0$, per la definizione di F, equivale a

$$-t(s) - \phi'(s) = 0. \tag{1.5}$$

Derivando quest'ultima rispetto ad s si trova $t'(s) = -\phi''(s) \neq 0$, quindi la risposta è affermativa.

Resta da verificare che questa $u(t)$ è soluzione della (1.1), il che per la prima delle (1.4) si riduce a dimostrare che $s = u'\big(t(s)\big)$. Il fatto che l'insieme $\{\, (t, u) \,|\, t = t(s),\ u = \tilde{u}(s) \,\}$ sia il grafico di una funzione $u = u(t)$ significa che vale l'uguaglianza $u\big(t(s)\big) = \tilde{u}(s)$. Derivando rispetto ad s si trova $u'\big(t(s)\big)\, t'(s) = \tilde{u}'(s)$, quindi

$$u'\big(t(s)\big) = \frac{\tilde{u}'(s)}{t'(s)}. \tag{1.6}$$

Inoltre l'uguaglianza $F\big(t(s), \tilde{u}(s), s\big) = 0$, per la definizione di F, equivale a $\tilde{u}(s) - t(s)\, s - \phi(s) = 0$. Derivando quest'ultima rispetto ad s si trova $\tilde{u}'(s) - t'(s)\, s - t(s) - \phi'(s) = 0$, che per la (1.5) diventa $\tilde{u}'(s) - t'(s)\, s = 0$, quindi $\tilde{u}'(s)/t'(s) = s$. Sostituendo nella (1.6) si trova $u'\big(t(s)\big) = s$, come volevasi dimostrare. $\square$