1. Teorema di Picard

Siano $f_1, f_2, \cdots, f_n$ delle funzioni delle $n+1$ variabili reali $t, u_1, u_2, \cdots, u_n$, definite in un aperto A di $\mathbf{R}^{n+1}$. Un sistema di equazioni differenziali è un sistema di n equazioni

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \cdots, u_n) \\ u_2' = f_2(t, u_1, \cdots, u_n) \\ \vdots \\ u_n' = f_n(t, u_1, \cdots, u_n) \end{cases} \tag{1.7}$$

nelle n funzioni incognite $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$.

Definizione 1.1 *Una n-upla di funzioni derivabili $u_1(t), \cdots, u_n(t)$, definite in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$ è una soluzione del sistema* [1.7] *se:*
(a) *per ogni $t \in I$ il punto di coordinate $\{t, u_1(t), \cdots, u_n(t)\}$ appartiene ad A;*
(b) *per ogni $t \in I$ si ha*

$$\begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \\ u_2'(t) = f_2(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)) \\ \vdots \\ u_n'(t) = f_n(t, u_1(t), \cdots, u_n(t)). \end{cases} \tag{1.8}$$

Notiamo che la condizione (a) è necessaria affinchè abbia senso [1.8], dato che le funzioni $f_1, \cdots, f_n$ sono definite in A. In genere però essa viene sottintesa a vantaggio della (b), che è ovviamente la condizione che caratterizza la soluzione.

Se indichiamo con $\mathbf{u}(t)$ la funzione, a valori in $\mathbf{R}^n$, di componenti $u_1, u_2, \cdots, u_n$ e con $\mathbf{f}$ l'applicazione di A in $\mathbf{R}^n$ di componenti $f_1, f_2, \cdots, f_n$, il sistema [1.7] prende la forma più concisa:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}). \tag{1.9}$$

Un tale sistema di equazioni differenziali si chiama *del primo ordine* (perchè vi compaiono solo le funzioni incognite e le loro derivate prime) *in forma normale* (perchè le derivate compaiono isolate al primo membro).

È plausibile aspettarsi che la soluzione del sistema

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \tag{2.1}$$

sia determinata univocamente dalle condizioni iniziali

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^0 \in \mathbf{R}^n, \tag{2.2}$$

o, se si preferisce scriverle componente per componente:

$$\begin{aligned} u_1(t_0) &= u_1^0 \\ u_2(t_0) &= u_2^0 \\ &\vdots \\ u_n(t_0) &= u_n^0. \end{aligned}$$

Il problema di determinare la soluzione del sistema [2.1] con le condizioni iniziali [2.2] prende il nome di *problema di Cauchy* oppure *problema a valori iniziali.*

Noi dimostreremo, sotto opportune ipotesi per la funzione $\mathbf{f}$, che esiste una ed una sola soluzione.

Per far questo cominciamo col fare alcune considerazioni. Supponiamo che la funzione $\mathbf{f}$ sia continua e che $\mathbf{u}(t)$ sia una funzione di classe C^1 in un intorno $I = I(t_0, r)$ del punto t_0, soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^0. \end{cases} \qquad [2.3]$$

Se si integra tra t_0 e t (è permesso grazie alla continuità di $\mathbf{f}$) si ottiene

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{u}'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds,$$

cosicchè $\mathbf{u}(t)$ soddisfa l'equazione integrale

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds. \qquad [2.4]$$

Viceversa se $\mathbf{u}(t)$ è una soluzione *continua* in $I(t_0, r)$ della [2.4], allora si ha $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^0$ e $\mathbf{u}(t)$ è una primitiva della funzione continua $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ e dunque è di classe C^1; inoltre verifica l'equazione differenziale $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$.

Riassumendo, *la funzione* $\mathbf{u}(t)$ *è soluzione del problema di Cauchy* [2.3] *se e solo se è soluzione continua dell'equazione integrale* [2.4].

Veniamo ora alle ipotesi sulla funzione $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$, ma non limitiamoci al caso di una sola equazione. Consideriamo invece il sistema di equazioni integrali [2.4].

La funzione $\mathbf{f}$ è definita in un aperto A di $\mathbf{R}^{n+1}$; se il punto di coordinate $(t_0, \mathbf{u}_0) = (t_0, u_0^1, \cdots, u_0^n)$ appartiene ad A potremmo supporre che esistano un intorno $I = I(t_0, r_1)$ di t_0 e intorni $J_j = I(u_0^j, r_2)$ di u_0^j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ dello stesso raggio r_2 tali che $I \times J_1 \times \cdots \times J_n$ sia contenuto in A (per $n = 1$ vedi fig. 3.1). Scriviamo $J = J_1 \times \cdots \times J_n$.

Utilizzando la norma Euclidea

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}, \qquad \mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n),$$

faremo le seguenti ipotesi:

(a) $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ è continua in A;

(b) esiste una costante L tale che

$$\|\mathbf{f}(s, \mathbf{v}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{w})\| \leq L \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

per ogni $s \in I$ e ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in J$.

Indicheremo poi con M il massimo della funzione $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{u})\|$ in $\overline{I \times J}$ (che esiste, perchè $\mathbf{f}$ è continua e $\overline{I \times J}$ è compatto in $\mathbf{R}^{n+1}$), e con r_0 un numero reale verificante la relazione

$$0 < r_0 < \min\{r_1, r_2/M, 1/L\}. \qquad [2.5]$$

Si ha il seguente

Teorema 2.1 (Caso vettoriale del Teorema di Picard). *Supponiamo che la funzione* $\mathbf{f}(t,\mathbf{u})$ *verifichi le ipotesi* (a) *è* (b). *Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \qquad [2.6]$$

ha soluzione unica in $I(t_0, r_0)$.

Dimostrazione. Basterà far vedere che l'equazione integrale [2.4] ha soluzione unica in $I_0 = I(t_0, r_0)$.

Indichiamo al solito con $C(I_0, \mathbf{R}^n)$ lo spazio di Banach delle funzioni continue e limitate $\mathbf{u} : I_0 \to \mathbf{R}^n$ con la norma

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_{t \in I_0} \|\mathbf{u}(t)\|,$$

e sia

$$X = \{\mathbf{u} \in C(I_0, \mathbf{R}^n) : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\infty \le r_2\},$$

dove al solito

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\infty = \sup_{t \in I_0} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0\|.$$

Poiché X è un sottoinsieme chiuso di $C(I_0, \mathbf{R}^n)$, X è uno spazio metrico completo (vedi cap. 1, esercizio 3.2).

Consideriamo l'applicazione F che ad ogni funzione $\mathbf{v} \in X$ associa la funzione $\mathbf{y} = F(\mathbf{v})$ definita da

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))\, ds.$$

La funzione $\mathbf{y}(t)$ è continua, e inoltre si ha, per ogni $t \in I_0$,

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{u}_0\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))\|\, ds \right| \le M|t - t_0| < M r_0 < r_2,$$

e quindi

$$\|F(\mathbf{v}) - \mathbf{u}_0\|_\infty \le r_2,$$

cosicchè F manda X in sé.

È chiaro che un punto fisso di F sarà soluzione dell'equazione integrale [2.4]; infatti se $\mathbf{u}$ è un punto fisso di F si ha

$$\mathbf{u}(t) = F(\mathbf{u})(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\, ds.$$

Ricordando il teorema 7.1 del capitolo 1 avremo dimostrato l'esistenza e l'unicità di un punto fisso se faremo vedere che F è una contrazione.

Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ e sia $\mathbf{y} = F(\mathbf{v})$, $\mathbf{z} = F(\mathbf{w})$. Risulta

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^{t} \{\mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{w}(s))\}\, ds,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{w}(s))\|\, ds \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{v}(s) - \mathbf{w}(s)\|\, ds \right| \leq L r_0 \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_\infty.\end{aligned}$$

Si ha allora

$$\|F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{w})\|_\infty \leq L r_0 \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_\infty,$$

e, poiché $L r_0 < 1$, l'applicazione F è una contrazione. Il teorema 7.1 del capitolo 1 assicura che la F ha un unico punto fisso e dunque il problema di Cauchy [2.6] ha soluzione unica in $I(t_0, r_0)$. ∎

La condizione (b), che può sembrare piuttosto difficile da verificare, è automaticamente soddisfatta se tutte le componenti $f_1, \cdots, f_n$ di $\mathbf{f}$ hanno derivate continue rispetto a $u_1, \cdots, u_n$. Per j, t e $u_1, \cdots, u_{k-1}, u_{k+1}, \cdots, u_n$ fissati, la funzione $f_j(t, \mathbf{u})$ si può considerare come funzione della sola variabile u_k. Supponiamo che questa funzione sia derivabile (rispetto alla variabile u_k) e che la derivata prima, che indicheremo con

$$\frac{\partial f_j}{\partial u_k}(t, \mathbf{u}) = \frac{\partial f_j}{\partial u_k}(t, u_1, \cdots, u_n),$$

sia una funzione continua in A.

Sia $t \in I$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in J$. Applicando il teorema del valor medio, si ottiene per $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$

$$\begin{aligned}&f_j(t, v_1, \cdots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n) - f_j(t, v_1, \cdots, v_{k-1}, w_k, v_{k+1}, \cdots, v_n) \\ &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial u_k}(t, v_1, \cdots, v_{k-1}, \xi_k, v_{k+1}, \cdots, v_n) \right) (v_k - w_k),\end{aligned}$$

dove ξ_k è un punto compreso tra v_k e w_k. Se si indica con $L/n\sqrt{n}$ il massimo di

$$\max_{j,k=1,\cdots,n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \right|$$

in $\overline{I \times J}$ (tale massimo esiste perché tutte le $\partial f_j / \partial u_k$ sono continue) si ha

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{v}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{w})\| \leq L \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

e quindi $\mathbf{f}$ soddisfa la condizione (b).

Osservazione 2.2. Da un punto di vista geometrico, il teorema 2.1 implica che i grafici di due soluzioni distinte $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di una stessa equazione differenziale non si possono incontrare. Infatti, se per qualche valore t_1 di t risultasse $\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{v}(t_1)$, per l'unicità della soluzione dovrebbe essere $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{v}(t)$ in un intorno di t_1, e dunque dappertutto per la continuità di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Osservazione 2.2a. Senza l'ipotesi (b) si può dimostrare soltanto l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy [2.6], ma si potrebbe perdere la sua unicità. Noi non dimostreremo questa formulazione più generale del teorema di Picard. È sufficiente un esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{3}{2}u(t)^{1/3} \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.6a}$$

Allora per ogni $c \geq 0$ la funzione

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t \leq c \\ (t-c)^{3/2}, & t \geq c, \end{cases}$$

è una soluzione del problema di Cauchy [2.6a]. Quindi manca l'unicità. Per dimostrare la non esistenza della costante L nell'ipotesi (b), si vede facilmente che per $f(t,u) = \frac{3}{2}u^{1/3}$ l'espressione

$$\left| \frac{f(t,w) - f(t,0)}{w} \right| = \frac{3}{2|w|^{2/3}}$$

non è limitata in un intorno di $w = 0$. Quindi la costante L non esiste.

Il problema di Cauchy per un' equazione di ordine k:

$$u^{(k)} = f(t, u, u', \cdots, u^{(k-1)})$$

consiste nell'assegnare al tempo t_0 i valori della funzione u e delle sue derivate fino all'ordine $k-1$:

$$\begin{cases} u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_0^1 \\ u''(t_0) = u_0^2 \\ \vdots \\ u^{(k-1)} = u_0^{k-1}. \end{cases}$$

Sotto certe ipotesi questo problema ha soluzione unica in un intorno di t_0. Infatti, introducendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) = (u, u', u'', \cdots, u^{(k-1)})$ e $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, u_0^2, \cdots, u_0^k)$ si ottiene il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \vdots \\ u_{k-1}' = u_k \\ u_k' = f(t, u_1, u_2, \cdots, u_k). \end{cases} \tag{2.6b}$$

Se la funzione f è definita in un aperto A di $\mathbf{R}^{n+1}$ e il punto di coordinate $(t_0, \mathbf{u}_0) = (t_0, u_0^1, \cdots, u_0^n) \in A$, potremo supporre di nuovo che esistano un intorno $I = I(t_0, r_1)$ di t_0 e intorni $J_j = I(u_0^j, r_2)$ di u_0^j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ dello stesso raggio r_2 tali che $\overline{I \times J_1 \times \cdots \times J_n}$ sia contenuto in A. Poniamo $J = J_1 \times \cdots \times J_n$. Allora il problema di Cauchy [2.6b] ha soluzione unica sotto le seguenti ipotesi:
(a) $f(t, \mathbf{u})$ è continua in A;
(b) esiste una costante L tale che

$$\|f(s, \mathbf{v}) - f(s, \mathbf{w})\| \leq L\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

per ogni $s \in I$ e ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in J$.

2. Disuguaglianza di Gronwall

Dal teorema di Picard si dimostra l'esistenza di una sola soluzione del problema di Cauchy [2.6] in un intorno di t_0, ma l'intervallo di esistenza della soluzione dipende dal problema di Cauchy in una maniera molto complessa. Comunque si può dimostrare l'esistenza della sola soluzione del [2.6] nell'intervallo I se il sistema di equazioni differenziali è lineare e i suoi coefficienti sono funzioni continue in $\overline{I}$ con valori in $\mathbf{R}^n$. Per stimare la soluzione utilizzeremo la disuguaglianza di Gronwall.

Lemma 3.3 (Caso vettoriale della disuguaglianza di Gronwall) *Sia $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n)$ una funzione di classe C^1 in (a, b) e supponiamo che esistano due costanti $\epsilon \geq 0$ e $Q > 0$ tali che*

$$\|\mathbf{w}'(t)\| \leq \epsilon + Q\|w(t)\|$$

per ogni $t \in (a, b)$. Allora per ogni $t, t_0 \in (a, b)$ risulta

$$\|\mathbf{w}(t)\| \leq \left(\frac{\epsilon}{Q} + \|\mathbf{w}(t_0)\|\right) e^{Q|t-t_0|}. \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Sia $\sigma > 0$ e sia $z(t) = \sqrt{\sigma^2 + \|\mathbf{w}(t)\|^2}$. Si ha, per ogni $s \in (a, b)$,

$$|z'(s)| = \left|\frac{\mathbf{w}(s) \cdot \mathbf{w}'(s)}{\sqrt{\sigma^2 + \|\mathbf{w}(s)\|^2}}\right| \leq \|\mathbf{w}'(s)\| \leq \epsilon + Q\|\mathbf{w}(s)\| \leq \epsilon + Qz(s),$$

e dunque

$$\left|\frac{d}{ds} \ln\left(\epsilon + Qz(s)\right)\right| \leq Q.$$

Da quest' ultima, integrando tra t_0 e t,

$$\ln \frac{\epsilon + Qz(t)}{\epsilon + Qz(t_0)} \leq Q|t - t_0|$$

e infine, passando dai logaritmi ai numeri,

$$\epsilon + Qz(t) \leq [\epsilon + Qz(t_0)]e^{Q|t-t_0|}.$$

Poiché $Q\|w(t)\| \leq \epsilon + Qz(t)$ si ha

$$\|w(t)\| \leq \left[\frac{\epsilon}{Q} + z(t_0)\right] e^{Q|t-t_0|}$$

che è valida per ogni $\sigma > 0$. Passando al limite per $\sigma \to 0$ si ha la [3.10]. ∎

3. Equazioni differenziali lineari

Siano $a_0(t), \cdots, a_{k-1}(t), f(t)$ delle funzioni continue in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$. L' equazione differenziale

$$u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t) \tag{5.1}$$

si dice *equazione differenziale lineare.*

La ragione di questa definizione deriva dal fatto che l'applicazione F, che ad ogni funzione u di classe C^k associa la funzione

$$E(u) = u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u, \tag{5.2}$$

è lineare, cioè soddisfa la relazione

$$E(\lambda u + \mu v) = \lambda E(u) + \mu E(v) \tag{5.3}$$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ e per ogni coppia u, v di funzioni di classe C^k nell'intervallo I.

Dalla relazione [5.3] segue immediatamente che *se u e v sono due soluzioni della* [5.1]

$$E(u) = f, \qquad E(v) = f,$$

la loro differenza è soluzione dell'equazione omogenea

$$E(u - v) = 0.$$

In altre parole, *se indichiamo con $\mathcal{V}_0$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea*

$$E(w) = 0 \tag{5.4}$$

e con u_f una soluzione dell'equazione [5.1], *le funzioni*

$$u = u_f + w$$

descrivono, al variare di w in $\mathcal{V}_0$, tutte le soluzioni dell'equazione

$$E(u) = f. \tag{5.5}$$

Per caratterizzare completamente le soluzioni della [5.5] sarà allora sufficiente studiare l'equazione omogenea [5.4] ad essa associata.

Cominciamo con alcune osservazioni.

Abbiamo visto nel paragrafo 1 che un' equazione di ordine k

$$u^{(k)}(t) = f(t, u, u', \cdots, u^{(k-1)}) \tag{5.6}$$

si può trasformare in un sistema del primo ordine, introducendo le funzioni $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$ definite da

$$\begin{cases} u_0(t) = u(t) \\ u_j(t) = u^{(j)}(t) = \dfrac{d^j u}{dt^j}, \; j = 1, 2, \cdots, k-1. \end{cases} \tag{5.7}$$

Con queste notazioni l'equazione [5.6] si tramuta nel sistema

$$\begin{cases} u_0' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ \vdots \\ u_{k-2}' = u_{k-1} \\ u_{k-1}' = f(t, u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}) \end{cases} \tag{5.8}$$

o più brevemente

$$\mathbf{U}' = F(t, \mathbf{U}), \tag{5.9}$$

dove $\mathbf{U}$ è il vettore di componenti $(u_0, \cdots, u_{k-1})$ e $F(t, \mathbf{U})$ ha componenti $(u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}, f(t, u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}))$.

Se l'equazione originale era lineare, il sistema ottenuto sarà anch' esso lineare, cioè del tipo

$$\mathbf{U}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} + \mathbf{B}(t), \tag{5.10}$$

dove $\mathbf{A}$ è una matrice $k \times k$ e $\mathbf{B}$ è un vettore k-dimensionale.

Prima di formulare il teorema dell'esistenza *globale* (cioè per ogni t nell'intervallo di definizione e continuità delle $A(t)$ e $B(t)$), introduciamo la norma di una matrice $\mathbf{C}$ del ordine k. Essa viene definita da ciascuna delle espressioni equivalenti

$$\|\mathbf{C}\| = \sup_{\|\mathbf{v}\| \le 1} \|\mathbf{C}\mathbf{v}\| = \sup_{\|\mathbf{v}\| = 1} \|\mathbf{C}\mathbf{v}\| = \sup_{\mathbf{v} \ne 0} \frac{\|\mathbf{C}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

dove $\|\mathbf{v}\|$ è la norma Euclidea del vettore k-dimensionale $\mathbf{v}$. Si vede facilmente che

$$\|\mathbf{C}\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{v}\|, \qquad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^k.$$

Teorema 5.0 *Siano $I = (a,b)$ un intervallo limitato e $t_0 \in (a,b)$. Supponiamo che $A : [a,b] \to \mathbf{R}^{k\times k}$ e $B : [a,b] \to \mathbf{R}^k$ siano funzioni continue. Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{U}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} + \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0 \end{cases} \tag{5.10a}$$

ha soluzione unica in (a,b).

Dimostrazione. Poiché $F(t,\mathbf{U}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} + \mathbf{B}(t)$ è continua in $[a,b] \times \mathbf{R}$ e $\|F(t,\mathbf{v}) - F(t,\mathbf{w})\| \le L\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ per $L = \max_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$, il teorema 2.1 implica l'esistenza di una soluzione unica della [5.10a] nell'intervallo $I(t_0, r_0) \cap (a,b)$, dove $r_0 = 1/L$. Siccome $[a,b]$ è totalmente limitato (vedi cap. 1, definizione 6.2), esiste un ricoprimento finito di $[a,b]$ da intervalli aperti $I_0, I_1, \cdots, I_m$ di misura $2/L$ con $t_0 \in I_0$. Data $t \in (a,b)$, c'è una sequenza di punti $t_0, t_1, \cdots, t_m \in (a,b)$ e quindi una catena di intervalli $I_0, I_1, \cdots, I_m$ tale che $t_0 \in I_0$, $t_1 \in I_0 \cap I_1$, $\cdots$, $t_m \in I_{m-1} \cap I_m$, $t \in I_m$. Dopo che abbiamo risolto il problema di Cauchy [5.10a] con soluzione $\mathbf{U}^0$ in I_0, risolviamo ora univocamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{1\prime} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}^1 + \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{U}^1(t_1) = \mathbf{U}^0(t_1) \end{cases}$$

in I_1 osservando che $t_1 \in I_0 \cap I_1$ e dunque $\mathbf{U}^0(t_1)$ è già definito. Poi risolviamo univocamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{2\prime} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}^2 + \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{U}^2(t_2) = \mathbf{U}^1(t_2) \end{cases}$$

in I_2 osservando che $t_2 \in I_1 \cap I_2$, ecc. Dopo $m+1$ passaggi otteniamo la soluzione unica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{m\prime} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}^m + \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{U}^m(t_m) = \mathbf{U}^{m-1}(t_m). \end{cases}$$

Si vede facilmente che $\mathbf{U}^{j-1}(t) = \mathbf{U}^j(t)$ per ogni $t \in I^{j-1} \cap I_j$, perchè entrambe le funzioni $\mathbf{U}^{j-1}$ e $\mathbf{U}^j$ soddisfano il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{U}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} + \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{U}(t_j) = \mathbf{U}^{j-1}(t_j) = \mathbf{U}^j(t_j) \end{cases}$$

in $I_{j-1} \cap I_j$ e la soluzione di questo problema esiste univocamente. ∎

L'argomento della catena serve anche per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione della [5.10a] in un intervallo aperto infinito. Dalla disuguaglianza di Gronwall segue:

$$\|\mathbf{U}(t)\| \le \left(\frac{\|\mathbf{B}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} + \|\mathbf{U}(t_0)\| \right) e^{\|\mathbf{A}\|_\infty |t-t_0|},$$

dove $\|\mathbf{A}\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\mathbf{A}(t)\|$ e $\|\mathbf{B}\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\mathbf{B}(t)\|$.

Nel seguito consideremo sempre soluzioni definite in un intervallo aperto I.

Si ha il seguente risultato:

Teorema 5.1 *L'insieme $\mathcal{V}_0$ delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine k:*

$$E(w) = 0 \qquad [5.10b]$$

è uno spazio vettoriale di dimensione k.

Dimostrazione. Che $\mathcal{V}_0$ sia uno spazio vettoriale segue immediatamente dalla [5.3]. Infatti se u e v appartengono a $\mathcal{V}_0$, cioè se $E(u) = E(v) = 0$, si ha per la [5.3] $E(\lambda u + \mu v) = 0$ e dunque $\lambda u + \mu v \in \mathcal{V}_0$.

Data $t_0 \in I$, esiste la soluzione unica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u^{(k)}(t) = f(t, u, u', \cdots, u^{(k-1)}) \\ (u(t_0), u'(t_0), \cdots, u^{(k-1)}(t_0)) = (u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}), \end{cases}$$

e questa soluzione dipende linearmente dal vettore dei dati iniziali $\mathbf{u}_0 = (u_0, u_1, \cdots, u_{k-1})$. D'altra parte, si ottiene subito il vettore dei dati iniziali da una soluzione $u \in \mathcal{V}_0$. Quindi la funzione $G : \mathbf{R}^k \to \mathcal{V}_0$ che ad ogni vettore di dati iniziali associa la corrispondente soluzione è lineare e bigettiva. Concludiamo che $\mathbf{R}^k$ e $\mathcal{V}_0$ hanno la stessa dimensione k. ∎

Se u_f è una soluzione particolare dell'equazione

$$E(u) = f$$

ogni altra soluzione sarà data dalla formula

$$u = u_f + c_0 u_0 + c_1 u_1 + \cdots + c_{k-1} u_{k-1} \qquad [5.11]$$

dove $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ sono costanti arbitrarie. La [5.11] prende il nome di *soluzione generale* della equazione $E(u) = f$.

Per risolvere la [5.10b] esplicitamente è necessaria una base dello spazio k-dimensionale $\mathcal{V}_0$. Per alcune equazioni sarà comunque più facile trovare una base di $\mathcal{V}_0$ di funzioni complesse. Per questa ragione osserviamo che il teorema 5.1 rimane valido se i dati iniziali sono numeri complessi e lo spazio $\mathcal{V}_0$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione k.

Date k funzioni $u_1, u_2, \cdots, u_k$ di classe C^k, il *Wronskiano* $W(u_1, u_2, \cdots, u_k)(t)$ si definisce come il determinante

$$W(u_1, u_2, \cdots, u_k)(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_k(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k-1)}(t) & u_2^{(k-1)}(t) & \cdots & u_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Si vede facilmente che il Wronskiano è uguale a zero per ogni $t \in I$ se le funzioni $u_1, u_2, \cdots, u_k$ sono linearmente dipendenti. Infatti se

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \cdots + c_k u_k(t) = 0, \qquad t \in I, \qquad [5.11a]$$

dove non tutte le c_j sono uguali a zero, si ha

$$c_1 \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \\ \vdots \\ u_1^{(k-1)}(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_2^{(k-1)}(t) \end{bmatrix} + \cdots + c_k \begin{bmatrix} u_k(t) \\ u_k'(t) \\ \vdots \\ u_k^{(k-1)}(t) \end{bmatrix} = 0, \qquad t \in I, \qquad [5.11b]$$

e quindi il Wronskiano è uguale a zero per ogni $t \in I$.

Teorema 5.2 *Siano $u_1, u_2, \cdots, u_k$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea $E(w) = 0$. Allora il Wronskiano $W(u_1, u_2, \cdots, u_k)(t)$ è uguale a zero per qualche (e dunque ogni) $t \in I$ se e solo se $u_1, u_2, \cdots, u_k$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. È chiaro che $W(t) = W(u_1, u_2, \cdots, u_k)(t)$ è di classe C^1. Infatti calcolando la derivata di $W(t)$ risulta

$$W'(t) = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_k(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k-1)}(t) & u_2^{(k-1)}(t) & \cdots & u_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_k(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(j-1)}(t) & u_2^{(j-1)}(t) & \cdots & u_k^{(j-1)}(t) \\ u_1^{(j+1)}(t) & u_2^{(j+1)}(t) & \cdots & u_k^{(j+1)}(t) \\ u_1^{(j+1)}(t) & u_2^{(j+1)}(t) & \cdots & u_k^{(j+1)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k-1)}(t) & u_2^{(k-1)}(t) & \cdots & u_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_k(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k-2)}(t) & u_2^{(k-2)}(t) & \cdots & u_k^{(k-2)}(t) \\ u_1^{(k)}(t) & u_2^{(k)}(t) & \cdots & u_k^{(k)}(t) \end{vmatrix},$$

osservando che rimane soltanto l'ultimo termine della sommatoria. Sviluppando le derivate k-esime nelle corrispondenti derivate j-esime per $j < k$, si ottiene

$$W'(t) = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_k(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k-2)}(t) & u_2^{(k-2)}(t) & \cdots & u_k^{(k-2)}(t) \\ u_1^{(j)}(t) & u_2^{(j)}(t) & \cdots & u_k^{(j)}(t) \end{vmatrix} = -a_{k-1}(t)W(t),$$

dove è rimasto soltanto l'ultimo termine della sommatoria. Siccome quest' equazione è separabile, otteniamo subito

$$W(t) = \text{cost.}\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\, ds},$$

il quale è uguale a zero per qualche t se e solo se è uguale a zero per ogni $t \in I$. Se $W(t_0) = 0$ per qualche $t_0 \in I$, esistono delle costanti $c_1, \cdots, c_k$, non tutte uguali a zero, tali che [5.11b] è vero per $t = t_0$. Osserviamo ora che per $t = t_0$ la parte a sinistra di [5.11b] è il vettore dei dati iniziali di $c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k$ e la parte a destra corrisponde alla soluzione $u(t) \equiv 0$. Grazie all'unicità della soluzione per gli stessi dati iniziali si ottiene [5.11b] per ogni $t \in I$, e quindi le soluzioni $u_1, u_2, \cdots, u_k$ sono linearmente dipendenti. ∎

Poiché il Wronskiano soddisfa l'equazione differenziale $W'(t) = -a_{k-1}(t)W(t)$ per $t \in I$, esso non dipende da t se $a_{k-1}(t) \equiv 0$. Per esempio, il Wronskiano dell'equazione $u'' = -a_0(t)u$ è una costante.

Sia $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ una base dello spazio $\mathcal{V}_0$ delle soluzioni dell'equazione omogenea $E(w) = 0$. Allora si può rappresentare ogni soluzione dell'equazione omogenea come

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \cdots + c_k u_k(t),$$

dove $c_1, \cdots, c_k$ sono costanti. Per trovare le soluzioni dell'equazione non omogenea [5.1] si rappresentano le soluzioni della [5.1] con

$$u(t) = c_1(t) u_1(t) + c_2(t) u_2(t) + \cdots + c_k(t) u_k(t), \qquad [5.11c]$$

dove $c_1, \cdots, c_k$ sono funzioni di t di classe C^{k-1}, e poi si risolve un sistema di k equazioni lineari per le funzioni $u_1'(t), \cdots, u_k'(t)$. Dopo un semplice integrazione si ottiene la soluzione generale della [5.1]. Il metodo prende il nome di *metodo della variazione delle costanti.*

Teorema 5.3 (Metodo della variazione delle costanti). *Siano $u_1, \cdots, u_k$ delle soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $E(w) = 0$. Allora ogni soluzione della* [5.1] *prende la forma* [5.11c] *dove*

$$\begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_k(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(k-1)}(t) & u_2^{(k-1)}(t) & \cdots & u_k^{(k-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_k'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in I. \qquad [5.11d]$$

Dimostrazione. Rappresentando la soluzione $u(t)$ della [5.1] con [5.11c], si supponga

$$c_1'(t) u_1(t) + \cdots + c_k'(t) u_k(t) = 0, \qquad t \in I,$$

e si calcoli la derivata della [5.11c]:

$$u'(t) = c_1(t) u_1'(t) + c_2(t) u_2'(t) + \cdots + c_k(t) u_k'(t). \qquad [5.11e]$$

Poi si supponga

$$c_1'(t) u_1'(t) + \cdots + c_k'(t) u_k'(t) = 0, \qquad t \in I,$$

e si calcoli la derivata della [5.11e]:

$$u''(t) = c_1(t)u_1''(t) + c_2(t)u_2''(t) + \cdots + c_k(t)u_k''(t),$$

ecc. Finalmente, calcolando la derivata dell'equazione

$$u^{(k-1)}(t) = c_1(t)u_1^{(k-1)}(t) + \cdots + c_k(t)u_k^{(k-1)}(t)$$

e supponendo

$$c_1'(t)u_1^{(k-1)}(t) + \cdots + c_k'(t)u_k^{(k-1)}(t) = f(t),$$

si trova

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t) &= \sum_{l=1}^{k} c_l(t)u_l^{(k)}(t) + \sum_{l=1}^{k} c_l'(t)u_l^{(k-1)}(t) = -\sum_{l=1}^{k} c_l(t) \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t)u_l^{(j)}(t) + f(t) \\ &= -\sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) \sum_{l=1}^{k} c_l(t)u_l^{(j)}(t) + f(t) = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j(t)u^{(j)}(t) + f(t). \end{aligned}$$

Quindi u soddisfa la [5.1]. I passaggi eseguiti sono possibili, poichè il determinante della matrice del sistema [5.11d] coincide col Wronskiano e il Wronskiano è diverso da zero per ogni $t \in I$. ∎

Risolviamo ora l'equazione non omogenea

$$u'' + \omega^2 u = \cos\omega t,$$

utilizzando le soluzioni $u_1(t) = \cos\omega t$ e $u_2(t) = \sin\omega t$ dell'equazione omogenea. Da [5.11d] segue $u(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$ dove

$$\begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos\omega t}{\omega} \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos\omega t}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \\ \frac{1}{2\omega}(1 + \cos 2\omega t) \end{bmatrix},$$

e dunque per alcune costanti α_1 e α_2

$$c_1(t) = \alpha_1 + \frac{1}{4\omega^2}\cos 2\omega t, \qquad c_2(t) = \alpha_2 + \frac{t}{2\omega} + \frac{1}{4\omega^2}\sin 2\omega t.$$

Quindi la soluzione generale è data da

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1(t)\cos\omega t + c_2(t)\sin\omega t \\ &= \alpha_1\cos\omega t + \alpha_2\sin\omega t + \frac{1}{4\omega^2}\{\cos 2\omega t\cos\omega t + \sin 2\omega t\sin\omega t\} + \frac{t}{2\omega}\sin\omega t \\ &= \hat{\alpha}_1\cos\omega t + \alpha_2\sin\omega t + \frac{t}{2\omega}\sin\omega t, \end{aligned}$$

dove $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + \dfrac{1}{4\omega^2} = u(0)$ e $\alpha_2 = \dfrac{u'(0)}{\omega}$.