Lemma II 6.1. Si ha la seguente formula

$$\frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \cdots + \cos ny = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}. \qquad [6.1]$$

Dimostrazione. Invece dell' induzione matematica applichiamo le formule notevoli

$$\cos ky = \frac{e^{iky} + e^{-iky}}{2};$$

$$\sum_{k=0}^{n} r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \cdots + \cos ny \\
= \quad & -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \cos ky = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \{e^{iky} + e^{-iky}\} \\
= \quad & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1 - e^{i(n+1)y}}{1 - e^{iy}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)y}}{1 - e^{-iy}}\right] \\
= \quad & \frac{-2(1-\cos y) + 2(1-\cos y) - 2\cos(n+1)y + 2\cos ny}{4(1-\cos y)} \\
= \quad & \frac{\cos ny - \cos(n+1)y}{2(1-\cos y)} = \frac{2\sin(n+\frac{1}{2})y \sin\frac{1}{2}y}{4\sin^2\frac{1}{2}y} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}.
\end{aligned}$$

Nel sesto passaggio abbiamo applicato una delle formule di raddoppiamento e la formula

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

per $\alpha = (n+1)y$ e $\beta = ny$.

Un aperto A in $\mathbf{R}^n$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste una funzione continua $\varphi : [0,1] \to A$ tale che $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$. In altre parole, A si dice connesso per archi se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste una curva continua con sostegno in A che connette x e y. Senza discutere i dettagli, se un aperto in A è connesso per archi, per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste una funzione $\varphi : [0,1] \to A$ lineare a tratti tale che $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$.

Secondo la definizione di Giusti (p. 148), un aperto A di $\mathbf{R}^n$ si dice *connesso* se non esistono due aperti B e C disgiunti e non vuoti tali che $A = B \cup C$. È possibile di dimostrare che un aperto A di $\mathbf{R}^n$ è connesso per archi se e solo se è connesso.

Proposizione IV 3.1 *Se $f(\mathbf{x})$ ha derivate prime nulle in un aperto connesso per archi A, allora f è costante.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{x}^0$ due punti di A tali che la retta tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^0$ è completamente contenuta in A. Sia

$$h(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)), \qquad t \in [0,1].$$

Allora per $\xi = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ si ha

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(\xi)(x_i - x_i^0) = 0, \qquad t \in [0,1],$$

cosicchè $h(t)$ è costante sulla retta tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^0$. Allora $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$.

Adesso scegliamo una coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{x}^0 \in A$. Allora esiste una funzione $\varphi : [0,1] \to A$ lineare a tratti tale che $\varphi(0) = \mathbf{x}^0$ e $\varphi(1) = \mathbf{x}$. Quindi esistono $0 < t_1 < \cdots < t_m < 1$ tali che le rette tra $\mathbf{x}_0$ e $\varphi(t_1)$, tra $\varphi(t_1)$ e $\varphi(t_2)$, $\cdots$, tra $\varphi(t_{m-1})$ e $\varphi(t_m)$, e tra $\varphi(t_m)$ e $\mathbf{x}$ sono completamente contenute in A. Applicando il raggionamento precedente $m+1$ volte in seguito, otteniamo

$$f(\mathbf{x}^0) = \varphi(t_1) = \cdots = \varphi(t_m) = f(\mathbf{x}).$$

Lemma 2.5 *Siano E e F due insiemi di $\mathbf{R}^n$; risulta*

$$\overline{m}(E \cup F) \leq \overline{m}(E) + \overline{m}(F). \qquad [2.11]$$

Inoltre, se $E \cap F = \emptyset$, si ha

$$\underline{m}(E \cup F) \geq \underline{m}(E) + \underline{m}(F). \qquad [2.12]$$

Dimostrazione della seconda parte. Siano E e F due insiemi disgiunti di $\mathbf{R}^n$. Se $\underline{m}(E) + \underline{m}(F) = +\infty$, la [2.12] è evidente. Si può allora supporre che le misure interne di E e di F siano ambedue finite. Per $\epsilon > 0$ siano K e L due compatti, con $K \subset E$ e $L \subset F$ e tali che

$$m(K) > \underline{m}(E) - \epsilon, \qquad m(L) > \underline{m}(F) - \epsilon.$$

Osserviamo che $K \cap L = \emptyset$. Ricordando il Lemma 2.3,

$$\underline{m}(E \cup F) \geq m(K \cup L) \geq m(K) + m(L),$$

e quindi

$$\underline{m}(E \cup F) \geq \underline{m}(E) + \underline{m}(F) - 2\epsilon.$$

Poichè quest'ultima relazione vale per ogni $\epsilon > 0$ si ricava la [2.12]. □

Esercizio V 3.3 *Se $m(E) = 0$ e $F \subset E$, allora anche $m(F) = 0$.*
Dimostrazione. Si ha ovviamente

$$0 \leq \underline{m}(F) \leq \overline{m}(F) \leq \overline{m}(E) = m(E) = 0.$$

Quindi F è misurabile e $m(F) = 0$. □

Esercizio V 4.1 *Se E e F sono insiemi misurabili, $F \subset E$, e $m(F) < +\infty$, allora*

$$m(E - F) = m(E) - m(F).$$

Dimostrazione. Siano E e F insiemi misurabili, $F \subset E$, e $m(F) < +\infty$. Per ogni $r > 0$ gli insiemi $E \cap I_r$ e $F \cap I_r$ sono misurabili, e

$$\overline{m}(E) = \underline{m}(E) = \lim_{r \to \infty} m(E \cap I_r), \ \overline{m}(F) = \underline{m}(F) = \lim_{r \to \infty} m(F \cap I_r) < +\infty.$$

Inoltre,

$$(E - F) \cap I_r = (E \cap I_r) - (F \cap I_r), \qquad (F \cap I_r) \subset (E \cap I_r).$$

Ricordando il Teorema 2.1 e la [2.16], risultano la misurabilità di $(E-F) \cap I_r$ e dunque di $(E - F)$ e la relazione

$$m((E - F) \cap I_r) = m(E \cap I_r) - m(F \cap I_r).$$

Calcolando il limite se $r \to \infty$, risulta

$$m(E - F) = \lim_{r \to \infty} m((E - F) \cap I_r) = m(E) - m(F),$$

dove $m(F) < +\infty$ garantisce che la parte a destra non diviene mai $(+\infty) - (+\infty)$. $\square$

Esercizio V 4.2 *Se $F_1, F_2, \cdots$ sono insiemi misurabili, allora*

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

è misurabile.

Dimostrazione. Siano $F_1, F_2, \cdots$ insiemi misurabili. Allora per ogni $r > 0$ tutti gli insiemi $F_i \cap I_r$ sono misurabili con misura finita. Inoltre, $\overline{m}(F \cap I_r) \leq m(I_r) < +\infty$. Ricordando il Teorema 3.2, si ottiene la misurabilità dell'insieme

$$F \cap I_r = I_r - \bigcup_{i=1}^{\infty} \{I_r - (F_i \cap I_r)\}$$

per ogni $r > 0$. Quindi F è misurabile. $\square$

Esercizio 4.3 *Sia $F_1, F_2, F_3, \cdots$ una successione di insiemi misurabili, con $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ e con $m(F_1) < +\infty$, e sia*

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Allora F è misurabile, e

$$m(F) = \lim_{i \to \infty} m(F_i).$$

Dimostrazione. Sia $F_1, F_2, F_3, \cdots$ una successione di insiemi misurabili, con $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ e con $m(F_1) < +\infty$, e sia $F = \cap_{i=1}^{\infty} F_i$. Secondo il Teorema 2.1 e la [2.16], tutti gli insiemi $E_i = F_1 - F_i$ sono misurabili e $m(E_i) = m(F_1) - m(F_i)$. Inoltre,

$$\emptyset = E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subset F_1 - F = \cup_{i=1}^{\infty} E_i \subset F_1.$$

Applicando il Teorema 4.1 (in particolare, la [4.5]), risultano la misurabilità di $F_1 - F$ e la relazione

$$m(F_1 - F) = \lim_{i \to \infty} m(E_i).$$

Quindi $F = F_1 - (F_1 - F)$ è misurabile [vedi il Teorema 2.1], e

$$\begin{aligned} m(F) &= m(F_1) - m(F_1 - F) = m(F_1) - \lim_{i \to \infty} m(E_i) \\ &= \lim_{i \to \infty} (m(F_1) - m(E_i)) = \lim_{i \to \infty} m(F_1 - E_i) = \lim_{i \to \infty} m(F_i). \end{aligned}$$

L'ipotesi che F_1 abbia misura finita, è essenziale. Infatti, se tutti gli F_i sono insiemi misurabili con misura infinita e intersezione vuota [esempio: $F_i = \mathbf{R}^n - I_i$], la tesi dell'esercizio non è vero.