Esercizi: Spazi Metrici, Funzioni Continue e Contrazioni

1. Sia $h \in C[0,1]$ e $\lambda \in (-1,1)$. Dimostrare l'esistenza di una soluzione unica $u \in C[0,1]$ dell'equazione integrale lineare
$$u(t) - \lambda \int_0^t u(s)\,ds = h(t), \qquad 0 \le t \le 1.$$

2.* Sia $h \in C[0,1]$ e $\lambda > 0$. Dimostrare l'esistenza di una soluzione unica $u \in C[0,1]$ dell'equazione integrale non lineare
$$u(t) - \lambda \int_0^t u(s)^2\,ds = 1, \qquad 0 \le t \le 1,$$
per cui $\max_{t\in[0,1]} |u(t)| \le \dfrac{1}{4\lambda}$.

3. Sia $h \in C[0,+\infty)$ e $\lambda \in (-1,1)$. Dimostrare l'esistenza di una soluzione unica $u \in C[0,+\infty)$ dell'equazione integrale lineare
$$u(t) - \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty e^{-|t-s|} u(s)\,ds = h(t), \qquad t \in [0,+\infty).$$

4. Sia ℓ_1 lo spazio di Banach che consiste di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tale che
$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n| < +\infty.$$
Dimostrare che il sistema lineare infinito
$$x_n + \lambda \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} x_{n+k} = y_n, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$
ha una soluzione unica in ℓ_1 per ogni $\lambda \in (-\frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1})$ e $\{y_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_1$.

5.* Sia $h \in C[0,+\infty)$ una funzione non negativa. Dimostrare che l'equazione integrale non lineare
$$y(t) - \int_0^t \frac{y(s)}{y(s)+2} e^{-s}\,ds = h(t), \qquad t \in [0,+\infty),$$
ha una soluzione unica non negativa in $C[0,+\infty)$.

6. Sia c_0 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dimostrare che c_0 è uno spazio di Banach rispetto alla norma
$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|.$$

7. Dimostrare che la funzione $T : \ell_1 \to c_0$ definita da
$$T\{x_n\}_{n=1}^\infty = \{y_n\}_{n=1}^\infty, \qquad y_n = \sum_{k=n}^\infty x_k,$$
è continua.

8. Sia $h \in C(-\infty,+\infty)$ e $\lambda \in (-1,1)$. Dimostrare l'esistenza di una soluzione unica $u \in C(-\infty,+\infty)$ dell'equazione integrale lineare
$$u(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{u(s)}{1+(t-s)^2}\,ds = h(t), \qquad t \in (-\infty,+\infty).$$

6-11-1993