Compito 1, Analisi Matematica 2, 23-11-1993

1. Sia $h \in C[0,1]$ e $\lambda \in (-1,1)$. Applicare il teorema delle contrazioni (oppure un altro metodo) per dimostrare l'esistenza di una soluzione unica $u \in C[0,1]$ dell'equazione integrale lineare

$$u(t) - \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^t \frac{u(s)}{\sqrt{1-s^2}}\, ds = h(t), \qquad t \in [0,1].$$

2. Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   a. Dimostrare che questa serie di Fourier è uniformemente convergente per $x \in \mathbb{R}$.
   b. Trovare l'insieme E delle discontinuità di f.
   c. Sia $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Rappresentare $g(x)$ come la somma di una serie e calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2\, dt$ utilizzando $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

3. Trovare la serie di potenze della funzione

$$f(x) = \int_0^{1993x} \frac{\arcsin t}{t}\, dt$$

   e il suo raggio di convergenza R. Dimostrare la convergenza della serie per $x = R$ e rappresentare $f(R)$ come la somma di una serie.

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^5 \\ y(1) = 1, 2y'(1) = -3. \end{cases}$$

Ex. 1: 7 pt., Ex. 2: 8 pt., Ex. 3: 8 pt., Ex. 4: 7 pt.

"Compito" 1, Analisi Matematica 2

1. Sia ℓ_1 lo spazio di Banach che consiste di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

   Dimostrare che la funzione $T : \ell_1 \to C[0,1]$ definita da

$$(T\{x_n\}_{n=1}^{\infty})(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n,$$

   è continua.

2. Sia $h \in C[0,+\infty)$ e $\lambda \in (-1,1)$. Utilizzare una contrazione in $C[0,+\infty)$ oppure un altro metodo per dimostrare l'esistenza di una soluzione unica $u \in C[0,+\infty)$ dell'equazione integrale lineare

$$u(t) - \int_0^t e^{-s/\lambda} \frac{u(s)}{1+s^2}\, ds = h(t), \qquad t \in [0,+\infty).$$

3. Sia

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{(x+n)^2},\qquad x\geq 0.$$

a. Dimostrare che la serie converge uniformente in $x\in[0,1]$.

b. Dimostrare che la serie converge non uniformente in $x\in[0,+\infty)$. Considerare $\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{(x+n)^2}$ per $x=m$.

4. L'integrale di Dawson si definisce come

$$F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}e^{-x^2}.$$

a. Determinare l'insieme E di tutti gli $x\in\mathbb{R}$ per cui la serie è convergente assolutamente.
b. Dimostrare che si può calcolare $F'(x)$ termine a termine per ogni $x\in\mathbb{R}$.
c. Trovare un problema di Cauchy (del primo ordine) con soluzione $F(x)$.

5. Sia

$$f(x)=\ln\left(\sqrt[1993\,!]{\frac{1-x}{1+x}}\right),\qquad x\in(-1,1).$$

Trovare la serie di potenze di f in un intorno di $x=0$. Trovare il suo raggio di convergenza.

6. Sia

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{(n^2+1)^{2/3}},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

a. Dimostrare che la serie converge uniformemente in $x\in\mathbb{R}$.
b. Dimostrare che la serie ottenuta calcolando la derivata termine a termine non converge uniformemente in un intorno di $x=0$.

7. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2xy'(x)-y(x)+xy(x)^3\cos x=0\\ y(\pi)=\pi.\end{cases}$$

Cos'è la soluzione dell'equazione differenziale sotto la condizione iniziale $y(\pi)=0$?

8. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x)+6y'(x)+9y(x)=\dfrac{e^{-3x}}{x^2}\\ y(1)=0,\ y'(1)=e^{-3}.\end{cases}$$

Analisi Matematica 2, Compito 2, 8-2-1994

1. Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a. Dimostrare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
b. Calcolare $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ se esistono.

c. Determinare se f è differenziabile in $(0,0)$.

2. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y + z$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. Sia
$$f(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx, \qquad a \ge 0.$$
a. Dimostrare che $f(a)$ è continua su $[0,+\infty)$ con $f(0) = 0$.
b. Dimostrare che
$$f'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}\,dx, \qquad a > 0.$$
c. Calcolare l'integrale che rappresenta $f'(a)$ per $a > 0$.
d. Calcolare $f(a)$.

4. Calcolare
$$I = \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz,$$
dove V è il solido limitato dalle superfici $z = 0$, $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 2x$. Spiegare il significato geometrico di V.

Analisi Matematica 2, Compito 2, 10-3-1995

1. Sia
$$f(x,y) = |x|\sqrt{|y|}.$$
a. Dimostrare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.
b. Calcolare $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.
c. Calcolare $f_x(0,y)$ per $y \ne 0$ o dimostrare che non esiste.
d. Determinare se f è differenziabile in $(0,0)$.

2. Determinare i massimi e minimi (relativi e assoluti) e i punti di sella della funzione
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

3. Per $s > 0$ definiamo
$$F(s) = -\int_0^\infty e^{-st}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt.$$
a. Dimostrare che $F(s)$ è continua in $s \in (0,\infty)$.
b. Dimostrare che $F(s)$ è derivabile in $s \in (0,\infty)$ con derivata
$$F'(s) = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}^2 t\,dt = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+2)}.$$
Non c'è bisogno dimostrare la parte a destra.
c. Calcolare $F(s)$ per ogni $s > 0$.

4. Sia V il solido definito dalla disuguaglianze $\frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1$, $x^2 + y^2 \le 2x$, $y \ge 0$, e $0 \le z \le 1$.
a. Calcolare
$$\iiint_V \frac{2yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz.$$
b. Ridurre il calcolo del volume di V ad un integrale di una funzione di una singola variabile.

Analisi Matematica 2, Compito 3, 14-4-1994, Versione 1

1. Determinare se la forma differenziale
$$\frac{x+3y+2z}{(x+y+z)^2}\,dx + \frac{-x+y}{(x+y+z)^2}\,dy + \frac{2y+z}{(x+y+z)^2}\,dz$$
sia esatta nel dominio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z > 0\}$. Se è esatta, trovarne una primitiva.
2. Si trovi la lunghezza della seguente curva [in coordinate polari]:
$$\theta = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \qquad 1 \le \rho \le 3.$$
3. Per una costante $a > 0$, calcolare l'area della superficie del solido di rotazione ottenuto ruotando la lemniscata di Bernouilli [in coordinate polari]
$$\rho = a\sqrt{\cos(2\theta)}, \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$
rispetto all'asse x.
4. Calcolare l'integrale
$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{V}, \mathbf{n})\,d\sigma,$$
dove
$$\mathbf{V}(x,y,z) = ((x-y)(z+1), (x+y)(z+1), xy);$$
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ z \ge 0\}.$$

Analisi Matematica 2, Compito 3, 14-4-1994, Versione 2

1. Determinare se la forma differenziale
$$\frac{x+2z}{(x+y+z)^2}\,dx + \frac{2x+y+3z}{(x+y+z)^2}\,dy + \frac{z-y}{(x+y+z)^2}\,dz$$
sia esatta nel dominio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z > 0\}$. Se è esatta, trovarne una primitiva.
2. Si trovi la lunghezza della seguente curva [in coordinate polari]:
$$\theta = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \qquad \frac{1}{3} \le \rho \le 1.$$
3. Per una costante $a > 0$, calcolare l'area della superficie del solido di rotazione ottenuto ruotando la lemniscata di Bernouilli [in coordinate polari]
$$\rho = a\sqrt{\cos(2\theta)}, \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$
rispetto all'asse x.
4. Calcolare l'integrale
$$\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{V}, \mathbf{n})\,d\sigma,$$
dove
$$\mathbf{V}(x,y,z) = ((x-y)(z-1), (x+y)(z-1), xy);$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Analisi Matematica 2, Compito 3, 2-5-1994, Versione 3

1. Determinare se la forma differenziale
$$\frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+2y}{x^2+y^2}\,dy$$
sia esatta nel dominio $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,y) : y \geq 0\}$. Se è esatta, trovarne una primitiva. È anche esatta nel dominio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?
2. Sia L la curva
$$x^2+z^2 = 1, \qquad y = \left(\arctan\frac{z}{x}\right)^2, \qquad 0 \leq y \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$
Trovare la sua lunghezza e calcolare $\int_L d\omega$ dove $\omega = xdx + ydy + zdz$.
3. Calcolare l'area della superficie del solido di rotazione ottenuto ruotando la curva
$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$
rispetto all'asse x.
4. Calcolare l'integrale
$$\int_{\partial S^+} ((x,y,z),\mathbf{n})\;d\sigma,$$
dove ∂S^+ è il bordo del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$ e $\mathbf{n}$ è il versore normale esterno sul bordo.

Analisi Matematica 2, Compito 3, 21-4-1995

1. Consideriamo la forma differenziale
$$\omega = \left(3x^2y + y^3 - \frac{3}{4}(x^2+y^2)y\right)\,dx + \left(y + \frac{3}{4}x(x^2+y^2)\right)\,dy.$$
   a. Determinare se sia esatta in $\mathbb{R}^2$. Se è esatta, trovarne una primitiva.
   b. Calcolare $\int_\gamma \omega$, essendo γ la curva di equazione
$$y = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{2+\cos x} + \frac{3}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$
2. Sia φ la curva di equazione
$$\rho(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)^2, \quad \theta \in [-\pi,\pi].$$
   a. Determinare se φ è regolare, regolare a tratti, semplice, o chiusa.
   b. Calcolare la lunghezza della curva ϕ.
   c. Calcolare $\int_\varphi \omega$, dove $\omega = x\,dx + y\,dy$.

Si utilizzi $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+3x^2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\ln(x\sqrt{3}+\sqrt{1+3x^2})\right) = \sqrt{1+3x^2}$.

3. Calcolare l'area A della superficie
$$\varphi(\theta,t) = (\cos\theta\cosh t, t, \operatorname{sen}\theta\cosh t),$$
dove $(\theta,t) \in [0,2\pi] \times [-\ln 2, +\ln 2]$.
4. Sia S la superficie del solido limitato dalla superficie $x^2+y^2+z^2 = 4$ e i piani $z=-1$ and $z=1$ e che contiene l'origine. Calcolare
$$\int_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2}\,d\sigma,$$
dove $\vec{r} = (x,y,z)$ e $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.