Analisi Matematica 2, Primo Parziale, 9-1-1996, Versione 1

1. Sia $h \in C(-\infty, \infty)$, e sia $\lambda \in (-1, 1)$ una costante. Dimostrare che l'equazione integrale
$$u(t) - \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{-|s|} u(s)\, ds = h(t), \quad t \in \mathbf{R},$$
ha una soluzione unica $u \in C(-\infty, \infty)$.

2. Risolvere l'equazione di Bernouilli
$$tu'(t) + u(t) = tu(t)^3.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$u''(t) - 6u'(t) + 10u = 2 + e^{3t} \cos(t).$$
   a. Risolvere l'equazione omogenea.
   b. Trovare una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea.
   c. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = u'(0) = 0$.

4. Sia
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
   a. Dimostrare che f è continua in $(0, 0)$.
   b. Calcolare le derivate parziali della f nell'origine.
   c. Determinare se f è differenziabile in $(0, 0)$.

5. Calcolare i massimi e minimi della funzione
$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 7$$
nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Voto: $\sum_{j=1}^{5} S_j - \min\{S_i : i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, mentre $S_j \in [0, \frac{15}{2}]$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Analisi Matematica 2, Primo Parziale, 9-1-1996, Versione 2

1. Sia $h \in C(-\infty, \infty)$, e sia $\lambda \in (-1, 1)$ una costante. Dimostrare che l'equazione integrale
$$u(t) + \frac{\lambda}{2} \int_0^t e^{-|s|} u(s)\, ds = h(t), \quad t \in \mathbf{R},$$
ha una soluzione unica $u \in C(-\infty, \infty)$.

2. Risolvere l'equazione di Bernouilli
$$tu'(t) - u(t) = tu(t)^2.$$

3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u''(t) + 6u'(t) + 10u = 4 + e^{-3t}\mathrm{sen}\,(t).$$

   a. Risolvere l'equazione omogenea.
   b. Trovare una soluzione particolare dell'equazione nonomogenea.
   c. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = u'(0) = 0$.

4. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-x)^2(x+y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a. Dimostrare che f è continua in $(0,0)$.
   b. Calcolare le derivate parziali della f nell'origine.
   c. Determinare se f è differenziabile in $(0,0)$.

5. Calcolare i massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 6x - 7$$

   nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Voto: $\sum_{j=1}^{5} S_j - \min\{S_i : i = 1,2,3,4,5\}$, mentre $S_j \in [0, \frac{15}{2}]$ $(j = 1,2,3,4,5)$.

Analisi Matematica 2, Secondo Parziale, 8-3-1996, Versione 1

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & z \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

   a. Si calcolino i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Si precisino gli insiemi di convergenza semplice ed uniforme.
   c. Si dimostri la disuguaglianza

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \leq \frac{\pi^2}{8}.$$

   d*. Si spieghi perchè vale l'uguaglianza nella parte (c).

2. Consideriamo la serie di funzioni

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad f_n(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{x^2+n^3}\right), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

   a. Si dimostri la sua convergenza uniforme in $x \in \mathbf{R}$.

b. Si dimostri che S è derivabile e

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - x^2}{x^2 + (x^2 + n^3)^2}.$$

Consiglio: $|\mathrm{arctg}\, z| \le |z|$ per ogni $z \in \mathbf{R}$.

3. Ponendo $f_k(x) = x^{p-1+4k}(1-x^2)$ per $p > 0$ e $k = 0, 1, 2, \cdots$, si dimostri che

$$F(p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p+2k}.$$

Inoltre si dimostri che F è derivabile in $(0, \infty)$ con derivata

$$F'(p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x^2}\, dx.$$

4. Calcolare l'area della parte del piano specificata dalle disuguaglianze

$$x^2 + y^2 \le 2, \quad 2xy \ge 1, \quad 0 \le x\sqrt{3} \le y.$$

Consiglio: $\mathrm{tg}\, 75° = 2 + \sqrt{3}$, $\dfrac{d}{dt} \ln |\mathrm{tg}\, t| = \dfrac{2}{\sin(2t)}$.

5. Calcolare il volume del solido specificato dalle disuguaglianze

$$1 \le x^2 + y^2 \le 2x, \quad 0 \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad 0 \le z \le \frac{y^2}{x^2}.$$

Voto: $\sum_{j=1}^{5} S_j - \min\{S_i : i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, mentre $S_j \in [0, \frac{15}{2}]$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Analisi Matematica 2, Secondo Parziale, 8-3-1996, Versione 2

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & z \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -1, & z \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

a. Si calcolino i suoi coefficienti di Fourier.
b. Si precisino gli insiemi di convergenza semplice ed uniforme.
c. Si dimostri la disuguaglianza

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \le \frac{\pi^2}{8}.$$

d*. Si spieghi perchè vale l'uguaglianza nella parte (c).

2. Consideriamo la serie di funzioni

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x), \quad f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{(\operatorname{sen} nx)^2}{n^2 \ln^3 n}\right), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

a. Si dimostri la sua convergenza uniforme in $x \in \mathbf{R}$.
b. Si dimostri che S è derivabile e

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} 2nx}{n^2 \ln^3 n + (\operatorname{sen} nx)^2}.$$

Consiglio: $|\ln(1+z)| \le z$ per ogni $z \ge 0$.

3. Ponendo $f_k(x) = x^{p-1+6k}(1-x^3)$ per $p > 0$ e $k = 0, 1, 2, \cdots$, si dimostri che

$$F(p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^3}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p+3k}.$$

Inoltre si dimostri che F è derivabile in $(0, \infty)$ con derivata

$$F'(p) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x^3}\, dx.$$

4. Calcolare l'area della parte del piano specificata dalle disuguaglianze

$$x^2 + y^2 \le 2, \quad 2xy \ge 1, \quad 0 \le y \le x\sqrt{3}.$$

Consiglio: $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$, $\dfrac{d}{dt} \ln |\operatorname{tg} t| = \dfrac{2}{\sin(2t)}$.

5. Calcolare il volume del solido specificato dalle disuguaglianze

$$1 \le x^2 + y^2 \le 2y, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le z \le \frac{3x^2}{y^2}.$$

Voto: $\sum_{j=1}^{5} S_j - \min\{S_i : i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, mentre $S_j \in [0, \frac{15}{2}]$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Analisi Matematica 2, Terzo Parziale, 26-4-1996

1. Data la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy;$$

a. si calcoli $\int_\varphi \omega$, dove $\varphi : [0, 2N\pi] \to \mathbf{R}^2$ è definita da $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $N \in \mathbf{N}$;
b. si dimostri che ω è esatta in $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \le 0\}$;
c. si stabilisca se ω è esatta in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Data la curva $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\varphi(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t),$$

a. si calcoli $\int_\varphi \omega$, dove $\omega = \frac{1}{2}[-y\,dx + x\,dy]$;
b. Si spieghi la relazione fra questo integrale curvilineo e l'area racchiusa dalla curva.

3. Data la forma differenziale $\omega = y^2\,dx + xy\,dy + xz\,dz$,

   a. si calcoli il rotore di (y^2, xy, xz);
   b. si calcoli il normale del piano di equazione $y = z$;
   c. si calcoli $\int_\varphi \omega$, dove il sostegno della curva semplice φ è l'intersezione del piano di equazione $y = z$ con la superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = 2y$.

4. Data la superficie $\varphi : [0,2] \times [-\pi,\pi] \to \mathbf{R}^3$ di equazione

$$\varphi(s,t) = (s^2 \cos t, s, s^2 \operatorname{sen} t),$$

   a. se ne determini l'area (basterà un integrale di una funzione di una variabile);
   b. si scriva l'equazione del piano tangente in $\varphi(1,0)$.

5. Si consideri la trasformazione

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x},$$

   che converte il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{2} < y < x^2,\ \frac{y^2}{2} < x < y^2\}$ nel quadrato $(1,2) \times (1,2)$.

   a. si determini lo Jacobiano di questa trasformazione;
   b. si calcoli l'area del dominio D.

Per $j = 1,2,3,4,5$ sia Voto$[j]$ il voto dell'esercizio j-esimo. Allora Voto$[j] \in [0, \frac{15}{2}]$ e

$$\text{Voto} = \sum_{j=1}^{5} \text{Voto}[j] - \min\{\text{Voto}[i] : i = 1,2,3,4,5\}.$$