Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 16-5-1994

1. Consideriamo la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}\,(kx) \right],$$

dove $f(x) = |x|$ per $x \in (-\pi, \pi)$ è una funzione pari.

a. Calcolare i coefficienti a_0, a_m e b_m.

b. Discutere la convergenza della serie.

c. Calcolando la derivata termine a termine, cioè

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k b_k \cos(kx) - k a_k \mathrm{sen}\,(kx) \right].$$

determinare $g(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

d. Applicare l'uguaglianza di Parseval per trovare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 6e^{-2t}\cos(3t),$$

e la soluzione sotto le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$\begin{cases} f : D \to \mathbf{R}^2 \\ f(x,y) = xy^2, \end{cases}$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 1\}.$$

4. Consideriamo il solido di rotazione ottenuto girando il grafico della funzione $f(x) = \mathrm{sen}\,(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$ rispetto all'asse x.

a. Calcolare l'area della superficie S del solido.

b. Sia $\vec{n}$ il versore normale esterno (dove esiste). Calcolare $\int_S (\vec{V}, \vec{n})\, d\sigma$, dove $\vec{V} = (x+y+z)(1,1,1)$.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 15-6-1994

1. Per quali valori di $\alpha > 0$ è uniformemente convergente per ogni $x \in [0, +\infty)$ la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha x}{1 + n^4 x^2}?$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione di Bernouilli
$$y' - 2x^3 y^2 = 2xy,$$
e trovare la soluzione sotto la condizione iniziale $y(1994) = 0$. Si calcoli anche la soluzione sotto la condizione iniziale $y(0) = -1$.

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   a. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   b. Sono continue $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in $\mathbf{R}^2$?
   c. È differenziabile la funzione f nel punto $(0,0)$?

4. Sia V il solido connesso in $\mathbf{R}^3$ limitato dalle superficie
$$z = \pi, \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos z),$$
e contenuto nel cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 4-7-1994

1. Consideriamo la serie di Fourier

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \mathrm{sen}\, kx\right).$$

   a. Calcolare i coefficienti a_k e b_k.
   b. Calcolare la somma della serie di Fourier per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.
   c. Stabilire se

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(kb_k \cos kx - ka_k \mathrm{sen}\, kx\right).$$

   In altre parole, stabilire se è permessa la derivazione termine a termine.
   d. Calcolare la somma della serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

2. Consideriamo l'equazione di Eulero non omogenea

$$y''(x) + \frac{7}{x}\, y'(x) + \frac{9}{x^2}\, y(x) = \frac{1}{x^3}.$$

   a. Calcolare la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea.
   b. Calcolare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.

3. Calcolare i minimi e massimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

   sotto il vincolo $x + y + z = 22$.

4. Sia V il solido in $\mathbf{R}^3$ limitato dalla superficie conica $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e la parte inferiore della superficie sferica $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 16-9-1994

1. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}.$$

   a. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente per ogni $x \in \mathbf{R}$.

   b. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ è uniformemente convergente in $x \in [a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

   c. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ non è uniformemente convergente in $x \in \mathbf{R}$.

2. Consideriamo l'equazione non omogenea

$$y''(x) + 2\,y'(x) + 5\,y(x) = e^{-x}\cos(2x).$$

   a. Calcolare la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea.
   b. Calcolare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

3. Calcolare i minimi e massimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x^4 + 8y^4 + 27z^4$$

   sotto il vincolo $x + y + z = \dfrac{11}{6}$.

4.
   a. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\,dxdy$$

   utilizzando la sostituzione $x = r\cos^2\varphi$ e $y = r\,\mathrm{sen}^2\varphi$.
   b. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1\int_0^1 e^{-n(x+y)}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\,dxdy.$$

   c. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n\int_0^{n-y} \left(1 - \frac{x+y}{n}\right)^n \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\,dxdy.$$

Analisi Matematica 2 (F), Scritto Generale, 17-10-1994

1. Consideriamo la serie di Fourier
$$1 + |x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}\,(nx) \right].$$
   a. Calcolare i suoi coefficienti e discutere la sua convergenza (uniforme).
   b. Consideriamo la serie di Fourier
   $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n b_n \cos(nx) - n a_n \mathrm{sen}\,(nx) \right]$$
   ottenuta calcolando la derivata termine a termine. Discutere se è permessa la derivazione termine a termine e calcolare la somma $g(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.
   c. Calcolare
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$
   Si consiglia l'applicazione dell'uguaglianza di Parseval.

2. Consideriamo l'equazione non omogenea
$$y''(x) + 6\,y'(x) + 5\,y(x) = 4e^{-x} \cos(2x).$$
   a. Calcolare la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea.
   b. Calcolare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $y(0) = -\frac{1}{5}$ e $y'(0) = 1$.

3. Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   a. Dimostrare la continuità della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.
   b. Calcolare le derivate parziali della funzione f in $(0,0)$.
   c. Dimostrare che la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

4. Per $n = 0, 1, 2, \cdots$ consideriamo l'integrale
$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = t^{n+1} \int_0^{\infty} y^n e^{-ty}\, dy,$$
   dove abbiamo sostituito $x = ty$ per qualsiasi $t > 0$.
   a. Dimostrare che è permessa la derivazione rispetto a t sotto il segno dell'integrale.
   b. Calcolando la derivata rispetto a t si dimostri l'espressione
   $$I_{n+1} = (n+1) I_n.$$
   c. Calcolare I_n esplicitamente.

Il risultato dello scritto scadrà il 18-11-1994.

Analisi Matematica 2 (F), Scritto Generale, 18-11-1994

1. Sia $\alpha > 0$ una costante. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n(x) = n^{\alpha} \frac{x}{x^2 + n^3}.$$

   a. Dimostrare che la serie di funzioni è puntualmente convergente se $0 < \alpha < 2$.
   b. Dimostrare che la serie di funzioni è uniformemente convergente in $x \in \mathbf{R}$ se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
   c. Dimostrare che la serie di funzioni è uniformemente convergente in $x \in [0, 1]$ se $0 < \alpha < 2$. Si consiglia lo studio della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

2. Consideriamo l'equazione di Bernouilli

$$y' - \frac{3}{x} y = \frac{9}{2} x^4 y^{1/3}.$$

   a. Trovare la soluzione generale.
   b. Spiegare perchè si trovano le due soluzioni

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \pm(x^5 - x^2)^{3/2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

   sotto la condizione iniziale $y(1) = 0$.

3. Calcolare i massimi e minimi della funzione $f(x, y) = x + y^2$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

4. Per $0 < \alpha < \beta < +\infty$ consideriamo l'integrale

$$\int_1^2 \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} \, dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_1^2 x e^{-yx^2} \, dy dx.$$

   a. Scrivere la parte a sinistra come un integrale rispetto a y e la parte a destra come un integrale rispetto a x.
   b. Prendendo il limite se $\alpha \to 0^+$ e $\beta \to +\infty$, calcolare

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x} \, dx.$$

Il risultato dello scritto scadrà il 13-1-1995.

Analisi Matematica 2 (F), Scritto Generale, 18-1-1995

1. Sia
$$f(x) = |\mathrm{sen}\, 2x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \mathrm{sen}\, nx\right].$$

   a. Determinare i coefficienti a_0, a_n e b_n. Si nota che $a_n = 0$ per n dispari.
   b. Discutere la convergenza (assoluta, uniforme) della serie di Fourier di f.
   c. Calcolare la somma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

2. Consideriamo l'equazione differenziale
$$y'''(x) + 3y''(x) + 2y'(x) = 4x^2 + 16x + 32.$$

   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea.
   b. Trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
   c. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto la condizione iniziale $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

3. Calcolare i massimi e minimi della funzione
$$f(x, y, z) = 5 - x - y - z$$
sotto il vincolo
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

4. Sia V il solido in $\mathbf{R}^3$ limitato dalle superficie
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos z),$$
che si trova tra i piani $z = 0$ e $z = 2\pi$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Il risultato dello scritto scadrà il 25-2-1995.

Analisi Matematica 2 (F), Scritto Generale, 25-1-1995

1. Consideriamo la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n}} x^{3n+2}.$$

   a. Trovare il raggio di convergenza R.
   b. Trovare la somma per $x \in (-R, R)$.
   c. Trovare la somma per $x = -R$ e per $x = R$ se esiste.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}.$$

   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea.
   b. Trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
   c. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto la condizione iniziale $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Calcolare i massimi e minimi della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

   sotto i vincoli

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{1+y^2}\, dx - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}\, dy.$$

   a. Verificare che è esatta.
   b. Trovare una primitiva.
   c. Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è il segmento da $(0, 0)$ a $(1, 2)$.

Il risultato dello scritto scadrà il 25-2-1995.

Parziale 1, Analisi Matematica 2, 18-1-1995

1. Siano $h \in C[0,\infty)$ e $\lambda \in (-1,1)$. Applicare il teorema delle contrazioni (oppure un altro metodo) per dimostrare l'esistenza di una soluzione unica $u \in C[0,\infty)$ dell'equazione integrale lineare

$$u(t) - \lambda \int_0^\infty e^{-(t+s)} u(s)\, ds = h(t), \qquad t \in [0,\infty).$$

2. Sia

$$f(x) = |\mathrm{sen}\, 2x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \mathrm{sen}\, nx \right].$$

   a. Determinare i coefficienti a_0, a_n e b_n. Si nota che $a_n = 0$ per n dispari.
   b. Discutere la convergenza (assoluta, uniforme) della serie di Fourier di f.
   c. Calcolare la somma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

3. Consideriamo la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}.$$

   a. Trovare il raggio di convergenza R.
   b. Trovare la somma per $x \in (-R, R)$.
   c. Trovare la somma per $x = -R$.

4. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'''(x) + 3y''(x) + 2y'(x) = 4x^2 + 16x + 32.$$

   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea.
   b. Trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
   c. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto la condizione iniziale $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Ex. 1: 7 pt., Ex. 2: 8 pt., Ex. 3: 8 pt., Ex. 4: 7 pt.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 27-2-1995

1. Consideriamo la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}\,(kx) \right],$$

dove $f(x) = x^2$ per $x \in (-\pi, \pi)$.
  a. Calcolare i coefficienti a_0, a_m e b_m.
  b. Discutere la convergenza della serie.
  c. Calcolando la derivata termine a termine, cioè

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k b_k \cos(kx) - k a_k \mathrm{sen}\,(kx) \right].$$

  determinare $g(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.
  d. Applicare l'uguaglianza di Parseval per trovare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 6y'(t) + 13y(t) = 4e^{3t} \cos(2t),$$

e la soluzione sotto le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

3. Calcolare i minimi e massimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x + 2y^2 + z$$

sotto il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

4. Consideriamo il solido di rotazione ottenuto girando il grafico della funzione $f(x) = \cos(x)$ per $x \in [0, 4\pi]$ rispetto all'asse x.
  a. Calcolare l'area della superficie S del solido.
  b. Sia $\vec{n}$ il versore normale esterno (dove esiste). Calcolare $\int_S (\vec{V}, \vec{n})\, d\sigma$, dove $\vec{V} = (x + y + z)(1, 1, 1)$.

Il risultato dello scritto scadrà il 31.03.1995.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 24-3-1995

1. Consideriamo la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \right],$$

dove $f(x) = x$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $f(x) = 0$ per $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi)$.

a. Calcolare i coefficienti a_0, a_m e b_m.

b. Trovare la somma della serie per $x \in \{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

c. In quali dei seguenti intervalli di x c'è la convergenza uniforme: $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$?

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$t^2 u''(t) - 3tu'(t) + 4u(t) = t + 1.$$

a. Trovare la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea.

b. Trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

3. Determinare i massimi e minimi (relativi e assoluti) e i punti di sella della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x^2 - 8xy + 4y^2.$$

4. In coordinate polari consideriamo la funzione

$$r(\theta) = |\cos\theta|.$$

a. Determinare se la curva è chiusa, semplice, o regolare.

b. Calcolare la lunghezza della corrispondente curva.

c. Calcolare l'area della superficie del solido di rotazione ottenuto rotando la figura rispetto all'asse x.

Il risultato dello scritto scadrà il 22.04.1995.