Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 5-5-1995

1. Consideriamo la serie di potenze
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2z)^n}{3n + \log n}.$$
   a. Calcolare il raggio di convergenza R.
   b. Determinare gli insiemi di convergenza semplice ed assoluta.
   c. In quali intervalli $[a, R]$ $(-R \leq a < R)$ e $[-R, b]$ $(-R < b \leq R)$ è uniformemente convergente la serie di potenze?

2. Consideriamo l'equazione differenziale
$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = f(t).$$
   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea.
   b. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ se $f(t) = e^t + t$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione
$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2$$
sotto il vincolo $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

4. Consideriamo la superficie (elicoide) di equazione
$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 4\pi].$$
   a. Determinare se la superficie è regolare o chiusa.
   b. Calcolare l'area della superficie.
   c. Calcolare la lunghezza della curva che costituisce il bordo della superficie.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 13-6-1995; Versione 1

1. Consideriamo la serie di funzioni
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-x^2/n}.$$
   a. Dimostrare che la serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$.
   b. Dimostrare che la serie converge uniformemente in $x \in \mathbf{R}$.
   c. Dimostrare che è permessa l'integrazione termine a termine nell'intervallo $(0, a)$ per ogni $a > 0$.
   d. Calcolando l'integrale di ciascun termine nell'intervallo $(0, \infty)$, dimostrare che non è permessa l'integrazione termine a termine nell'intervallo $(0, \infty)$.

2. Consideriamo l'equazione differenziale
$$(t^2 - 1)y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = f(t).$$
   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea se $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = t^2 + 1$ sono due soluzioni.
   b. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ se $f(t) = (t^2 - 1)^2$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2.$$

4. Consideriamo il solido V intersezione del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4x$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della parte della superficie del cilindro che si trova dentro la sfera.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 13-6-1995; Versione 2

1. Consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4z)^n}{2n + \log n}.$$

   a. Calcolare il raggio di convergenza R.
   b. Determinare gli insiemi di convergenza semplice ed assoluta.
   c. In quali intervalli $[a,R]$ $(-R \leq a < R)$ e $[-R,b]$ $(-R < b \leq R)$ è uniformemente convergente la serie di potenze?

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$(t^2 - 1)y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = f(t).$$

   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea se $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = t^2 + 1$ sono due soluzioni.
   b. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ se $f(t) = (t^2 - 1)^2$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2.$$

4. Consideriamo il solido V intersezione del cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della parte della sfera che si trova fuori del cilindro.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 3-7-1995

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -1, & z \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

   a. Calcolare i coefficienti di Fourier di questa funzione.
   b. Si precisino gli insiemi di convergenza semplice ed uniforme.
   c. Si dimostri la formula

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale omogenea

$$y'(t) = 1 - 4\left(\frac{t}{y}\right)^2 + \frac{y}{t}.$$

   a. Trovare la soluzione generale (in forma implicita).
   b. Trovare la soluzione sotto la condizione iniziale $y(1) = 1$.
   c. Trovare la soluzione sotto la condizione iniziale $y(1) = 2$.

3. Si determino i punti della curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 - xy \end{cases} \qquad (*)$$

   con massima e minima distanza dall'origine. [Consiglio: Si determino i punti della curva (*) dove $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ha massimo e minimo.]

4. Consideriamo il solido V intersezione del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ con il cono di equazione $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie del solido V.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 15-9-1995

1. Consideriamo la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n}} x^{3n+1}.$$

   a. Trovare il raggio di convergenza R.
   b. Trovare $f'(x)$ per $x \in (-R, R)$.
   c. Trovare $f(x)$ per $x \in (-R, R)$.
   d. Trovare $f(x)$ per $x = -R$ e per $x = R$ se esiste.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{(1 + e^x)^2}.$$

   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea.
   b. Trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.

3. Calcolare i minimi e massimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$$

   sotto il vincolo $x + y + z = 22$.

4. Consideriamo il solido di rotazione ottenuto girando il grafico della funzione $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$ rispetto all'asse x.
   a. Calcolare l'area della superficie S del solido.
   b. Sia $\vec{n}$ il versore normale esterno (dove esiste). Calcolare $\int_S (\vec{V}, \vec{n})\, d\sigma$, dove $\vec{V} = \frac{1}{3}(x + y + z)(1, 1, 1)$.

Il risultato dello scritto scadrà il 27-10-1995.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 20-10-1995

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione

$$f(z) = \begin{cases} |z|, & z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & z \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

   a. Calcolare i coefficienti di Fourier di questa funzione.
   b. Si calcoli la somma della serie di Fourier per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.
   c. Si precisino i sottoinsiemi di $[-\pi, \pi]$ dove la serie di Fourier è uniformemente convergente.
   c. Si dimostri la formula

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y''(t) + ky(t) = \operatorname{sen} kt,$$

   dove $k > 0$ è un parametro.
   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione per $k \in (0,1) \cup (1, \infty)$.
   b. Trovare la soluzione generale dell'equazione per $k = 1$.
   c. Spiegare (non troppo dettagliatamente) il fenomeno fisico descritto dalle soluzioni dell'equazione differenziale per $k = 1$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

   sotto il vincolo $z^2 - xy = 1$.

4. Consideriamo la superficie (catenoide) di equazione

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cosh v, \operatorname{sen} u \cosh v, v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, R].$$

   a. Determinare se la superficie è regolare.
   b. Calcolare l'area della superficie.
   c. Calcolare il volume del solido limitato dalla superficie e i due piani $z = R$ e $z = 0$.

Il risultato dello scritto scadrà il 24-11-1995.

Analisi Matematica 2 M/F, Scritto Generale, 28-11-1995

1. Consideriamo la serie geometrica di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}.$$

   a. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente per ogni $x \in \mathbf{R}$.
   b. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ è uniformemente convergente in $x \in [a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.
   c. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ non è uniformemente convergente in $x \in \mathbf{R}$.

Consiglio: Siccome tutte le serie sono geometriche, si possono calcolare le loro somme parziali e la loro somma esplicitamente.

2. Consideriamo l'equazione non omogenea

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 10\,y(x) = \cos(2x).$$

   a. Calcolare la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea.
   b. Calcolare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Calcolare i minimi e massimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x,y,z) = 8x^4 + y^4 + 27z^4$$

   sotto il vincolo $x + y + z = \dfrac{22}{3}$.

4. Sia V il solido in $\mathbf{R}^3$ limitato dalla superficie conica $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ e la parte superiore della superficie sferica $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Il risultato dello scritto scadrà il 12-1-1996.

Analisi Matematica 2 M/F, Scritto Generale, 15-12-1995

1. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}.$$

   a. Calcolare il raggio di convergenza.
   b. Determinare tutti gli intervalli compatti dove la serie è uniformemente convergente.

2. Consideriamo l'equazione di Clairaut

$$y = xy' - \frac{1}{3}(y')^3.$$

   a. Calcolare la soluzione generale.
   b. Spiegare il significato geometrico della famiglia di soluzioni.

3. Calcolare i minimi e massimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x,y,z) = z$$

   sotto i due vincoli

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

4. Consideriamo la porzione del cilindro di equazione $y^2 + z^2 = 1$, interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
   a. Calcolare il volume del solido V dentro i due cilindri.
   b. Calcolare l'area della porzione del cilindro di equazione $y^2 + z^2 = 1$, interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Il risultato dello scritto scadrà il 26-1-1996. Buon Natale.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 26-1-1996

1. Si dimostri che per $\alpha \in (0,1)$ è uniformemente convergente in $x \in [0,+\infty)$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha x^2}{1+n^4x^4}.$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione di Clairaut

$$xy' = y + (y')^3.$$

   Tracciare i grafici delle soluzioni per illustrare il loro significato geometrico.

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)^2 \cos \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   b. Sono continue $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in $\mathbf{R}^2$?
   c. È differenziabile la funzione f nel punto $(0,0)$? Se è differenziabile in $(0,0)$, si determini l'equazione del piano tangente in $(0,0)$.

4. Sia V il solido connesso in $\mathbf{R}^3$ limitato dalle superficie

$$x^2+y^2 = \operatorname{sen}^2 z,$$

   e contenuto nel cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\pi\}$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Il risultato dello scritto scadrà il 1-3-1996.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 23-2-1996

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione

$$f(z) = \begin{cases} z, & z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & z \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Si calcoli la somma della serie di Fourier per ogni $x \in [-\pi,\pi]$.
   c. Si precisino i sottoinsiemi di $[-\pi,\pi]$ dove la serie di Fourier è uniformemente convergente.

d. Utilizzando $\sum_{m=1}^{\infty}(1/m^2) = (\pi^2/6)$ si dimostri la formula

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} \leq \frac{\pi^4}{96}.$$

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = te^{2t} + 1.$$

a. Trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea.
b. Trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
c. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Calcolare i massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 7$$

nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4. Consideriamo il solido V intersezione del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ con il cono di equazione $\sqrt{x^2 + z^2} \leq y\sqrt{3}$.
a. Calcolare il volume del solido V.
b. Calcolare l'area della superficie del solido V.

Il risultato dello scritto scadrà il 29-3-1996.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 15-3-1996

1. Consideriamo la serie di funzioni

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x), \quad f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{(\operatorname{sen} nx)^2}{n^3}\right), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

a. Si dimostri la sua convergenza uniforme in $x \in \mathbf{R}$.
b. Si dimostri che S è derivabile e

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} 2nx}{n^3 + (\operatorname{sen} nx)^2}.$$

Consiglio: $|\ln(1 + z)| \leq z$ per ogni $z \geq 0$.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$t^2 u''(t) - 3tu'(t) + 4u = g(t).$$

a. Si determini la soluzione generale dell'equazione omogenea.
b. Si calcoli il wronskiano di due soluzioni dell'equazione omogenea linearmente indipendenti.
c. Si determini la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $u(1) = u'(1) = 0$ se $g(t) = t^3$.

3. Si determinino i massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = (1-y)(2-y-x^2)$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 2 - x^2 - y^2\}.$$

4. Consideriamo la parte D del piano specificata dalle disuguaglianze

$$x^2 + y^2 \leq 2, \quad 2xy \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a. Si calcoli la misura di D.
b. Si imposti l'integrale che rappresenta la lunghezza della parte della frontiera di D appartenente all'iperbole $2xy = 1$.

Consiglio: $\operatorname{tg} 75° = 1/\operatorname{tg} 15° = 2 + \sqrt{3}$, $\dfrac{d}{dt} \ln |\operatorname{tg} t| = \dfrac{2}{\sin(2t)}$.

Il risultato dello scritto scadrà il 26.04.1996.