Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 21-5-1996, Versione I

1. Per $\alpha > 0$ consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n(\log n)^\alpha}.$$

   a. Calcolare il raggio di convergenza R.
   b. Trovare gli $\alpha > 0$ per cui la serie è convergente per $z = R$.
   c. Dimostrare che la serie è convergente per $z = -R$ e $\alpha > 0$.
   d. Per ciascun $\alpha > 0$ si determinino gli intervalli $[-R, c]$ in cui la serie è uniformemente convergente.

2. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - v(t) + 2 \\ v'(t) = u(t) + v(t) + 1. \end{cases}$$

   a. Trovare la soluzione generale del sistema delle corrispondenti equazioni omogenee.
   b. Trovare la soluzione del sistema di equazioni non omogenee sotto le condizioni iniziali $u(0) = 1$ e $v(0) = 0$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

   sotto il vincolo $x^2 + yz = 9$.

4. Consideriamo il dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(x + \frac{y}{2}\right)^4 \leq x^2 y, x \geq 0 \right\}.$$

   a. Calcolare l'area del dominio D.
   b. Scrivere la lunghezza della curva che cstituisce la frontiera di D come un integrale di una funzione di una variabile.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 21-5-1996, Versione II

1. Per $\alpha > 0$ consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3z)^n}{n(\log n)^\alpha}.$$

   a. Calcolare il raggio di convergenza R.
   b. Trovare gli $\alpha > 0$ per cui la serie è convergente per $z = -R$.
   c. Dimostrare che la serie è convergente per $z = R$ e $\alpha > 0$.
   d. Per ciascun $\alpha > 0$ si determinino gli intervalli $[c, R]$ in cui la serie è uniformemente convergente.

2. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) + v(t) + 3 \\ v'(t) = u(t) + v(t) - 1. \end{cases}$$

   a. Trovare la soluzione generale del sistema delle corrispondenti equazioni omogenee.
   b. Trovare la soluzione del sistema di equazioni non omogenee sotto le condizioni iniziali $u(0) = 0$ e $v(0) = 1$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sotto il vincolo $y^2 - xz = 4$.

4. Consideriamo il dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x}{2} + y\right)^4 \le x^2 y, x \ge 0 \right\}.$$

   a. Calcolare l'area del dominio D.
   b. Scrivere la lunghezza della curva che cstituisce la frontiera di D come un integrale di una funzione di una variabile.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 12-6-1996

1. Consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z)^n}{3n + n^2 \log n}.$$

   a. Calcolare il raggio di convergenza R.
   b. Determinare gli insiemi di convergenza semplice ed assoluta.
   c. In quali intervalli $[a, R]$ $(-R \leq a < R)$ e $[-R, b]$ $(-R < b \leq R)$ è uniformemente convergente la serie di potenze?

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u''(t) - 2u'(t) + 2u = f(t).$$

   a. Trovare la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea.
   b. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto le condizioni iniziali $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$ se $f(t) = 1 + t$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

   nel dominio

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\right\}.$$

4. Consideriamo la superficie di equazione

$$\varphi(u, v) = (u \operatorname{sen} v, u \cos v, v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

   a. Calcolare il versore normale in ogni punto interno della superficie.
   b. Calcolare l'area della superficie.
   c. Calcolare la lunghezza della curva che costituisce il bordo della superficie.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 8-7-1996

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = \pi^2 - x^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.
   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie.
   c. Utilizzare la somma per $x = \pi$ (oppure per $x = 0$) per calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   d. Utilizzare la disuguaglianza di Bessel per dimostrare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \frac{\pi^4}{90}$.

2. Consideriamo la cosiddetta equazione logistica

$$\frac{dP}{dt} = P(k - bP),$$

   dove k, b sono due costanti positive.
   a. Trovare la soluzione generale.
   b. Calcolare il limite di $P(t)$ se $t \to +\infty$ sotto l'ipotesi che $P(0) > 0$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y) = 1 + x + y + \sqrt{y^2 - x}$$

   nel dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -y \leq x \leq y^2,\ y \leq 2\right\}.$$

4. Calcolare l'integrale

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz,$$

   dove V è il dominio definito dalla disuguaglianza $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 27-9-1996

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione f definita da $f(x) = 1$ per $0 \leq x \leq \pi$ e $f(x) = -1$ per $-\pi \leq x < 0$.
   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie.
   c. Utilizzare la serie di Fourier per calcolare $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$.
   d. Utilizzare la disuguaglianza di Bessel per dimostrare $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{8}$.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^3 \log|x|.$$

   a. Trovare la soluzione generale.
   b. Trovare la soluzione sotto la condizione iniziale $y(-1) = 0$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

   nel dominio

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\right\}.$$

   Basta trovare tutti i massimi e minimi assoluti e discutere se c'è un massimo o minimo in almeno un altro possibile punto di massimo o minimo.

4. Sia

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq 4 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}.$$

   a. Calcolare il volume di D.
   b. La frontiera di D è l'immagine di una superficie regolare a tratti. Si calcoli l'area di uno dei due "tratti".

Scritto Generale, Analisi Matematica 2, 25-10-1996

1. Consideriamo la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}\,(kx)],$$

dove $f(x) = \pi^2 - x^2$ per $x \in [-\pi, \pi]$.

a. Calcolare i coefficienti della serie di Fourier.

b. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie.

c. È permessa la sua derivazione termine a termine in $x \in (-\pi, \pi)$? Si spieghi la risposta [brevemente].

2. Risolvere l'equazione di Clairaut

$$y = x\,y' + \frac{1}{3}(y')^3$$

e spiegare il significato geometrico della famiglia di tutte le soluzioni.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 4), \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

a. Disegnare i domini nel piano dove f è positiva e dove f è negativa.

b. Calcolare i nove punti stazionari della funzione f.

c. Determinare i massimi e minimi (relativi ed assoluti) della f.

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy}{(1 + x^2)^2}\,dx - \frac{1}{1 + x^2}\,dy.$$

a. Verificare che è esatta.

b. Trovare una primitiva. Come si trovano tutte le altre primitive?

c. Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è lo spirale di equazione $\gamma(t) = (t^2 \cos(\pi t), t^2 \mathrm{sen}\,(\pi t))$ $(0 \le t \le 1996)$.

Scritto Generale, Analisi Matematica 2, 22-11-1996

1. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{(n^2+1)^\alpha x}, \qquad \alpha > 0.$$

   a. Dimostrare che la serie di funzioni è uniformemente convergente in $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ se $\alpha > 1$.
   b. Dimostrare che per $\alpha > 1$

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{(n^2+1)^\alpha x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n^2+1)^\alpha}.$$

2. Risolvere il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   a. Prima si risolva il corrispondent sistema di equazioni omogenee.
   b. Poi si risolva il sistema non omogeneo.

3. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{|x|^3 + |y|^3}, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

   a. Dimostrarne la continuità in $(0,0)$.
   b. Calcolare le sue derivate parziali in tutti i punti dell'asse x e in tutti i punti dell'asse y, incluso l'origine.
   c. Stabilire se f è differentiabile in $(0,0)$. Se lo è, trovare l'equazione del suo piano tangente in $(0,0)$.

4. Sia

$$I_n = \int_0^n \int_0^{n-y} \left(1 - \frac{x+y}{n}\right)^n \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right) dx dy, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

   a. Calcolare I_n. Si consiglia l'applicazione della trasformazione $x = r\cos^2\theta$ e $y = r \operatorname{sen}^2\theta$.
   b. Calcolare $\lim_{n \to \mathbf{N}} I_n$ direttamente.
   c. Calcolare $\lim_{n \in \mathbf{N}} I_n$ cambiando l'ordine di limite ed integrazione e giustificando il cambio.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 24-1-1997, Versione I

1. Per $\alpha > 0$ consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3z)^n}{n(\log n)^\alpha}.$$

   a. Calcolare il raggio di convergenza R.
   b. Trovare gli $\alpha > 0$ per cui la serie è convergente per $z = R$.
   c. Dimostrare che la serie è convergente per $z = R$ e $\alpha > 0$.
   d. Per ciascun $\alpha > 0$ si determinino gli intervalli $[c, R]$ in cui la serie è uniformemente convergente.

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

3. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 9), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

   a. Disegnare i domini nel piano dove f è positiva e dove f è negativa.
   b. Calcolare i nove punti stazionari della funzione f.
   c. Determinare i massimi e minimi (relativi ed assoluti) della f.

4. Sia V il solido in $\mathbf{R}^3$ limitato dalla superficie conica $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ e la parte inferiore della superficie sferica $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 31-1-1997, Versione II

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2 - \pi^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.
   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Discutere la sua convergenza puntuale e uniforme.
   c. Utilizzare la sua somma per $x = \pi$ (oppure per $x = 0$) per calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   d. Giustificare la sua derivazione termine a termine.

2. Trovare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{5}{13}u(t) + \dfrac{12}{13}v(t) + 1 \\ v'(t) = -\dfrac{12}{13}u(t) + \dfrac{5}{13}v(t). \end{cases}$$

3. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \log(x^2+y^2), & (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a. Dimostrarne la continuità in $(0,0)$.
   b. Calcolare le sue derivate parziali in tutti i punti dell'asse x e in tutti i punti dell'asse y, incluso l'origine.
   c. Stabilire se f è differentiabile in $(0,0)$. Se lo è, trovare l'equazione del suo piano tangente in $(0,0)$.

4. Consideriamo il dominio

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x+y)^4 \le xy^2, y \ge 0 \right\}.$$

   a. Calcolare l'area del dominio D.
   b. Scrivere la lunghezza della curva che cstituisce la frontiera di D come un integrale di una funzione di una variabile.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 24-2-1997

1. Consideriamo la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

   a. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si trovino la sua somma e la sua somma parziale n-esima.
   b. Trovare gli intervalli $[a, +\infty)$ (con $a \geq 0$) tale che la serie di funzioni è uniformemente convergente in $x \in [a, +\infty)$.
   c. Dimostrare che $f'(x)$ (con $x > 0$) può essere ottenuto calcolando la derivata termine a termine. Consiglio: Per $z = 1/(1+x^2)$ risulta una serie di potenze.

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale di Bernouilli

$$(1+x^2)y'(x) - x\,y(x) + \frac{1-x^2}{2}\,y(x)^3 = 0.$$

3. Per $h \in C^1[0, +\infty)$ consideriamo la forma differenziale

$$\omega = h(r)(x\,dx + y\,dy),$$

   dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
   a. Dimostrare che ω è chiusa in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   b. Calcolare $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ tale che $\omega = df$.
   c. Utilizzando che $g \in C^1[0, +\infty)$, dimostrare che $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$.

4. Sia V il solido di rotazione in $\mathbf{R}^3$ definito dalle disuguaglianze $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ e $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Analisi Matematica 2, Scritto Generale, 14-3-1997

1. Consideriamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\, x^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, dove $\operatorname{sgn}(x) = +1$ per $x > 0$ e $\operatorname{sgn}(x) = -1$ per $x < 0$.
   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie.
   c. Dimostrare la sua integrabilità termine a termine per $x \in (-\pi, \pi)$.
   d. Dimostrare la sua derivabilità termine a termine per $x \in (-\pi, \pi)$.

2. Risolvere l'equazione differenziale

$$u''(t) + 4u'(t) + 4u(t) = -e^{-2t}$$

   sotto le condizioni iniziali $u(0) = u'(0) = 0$.

3. Determinare i massimi e i minimi (relativi e assoluti) della funzione

$$f(x, y) = 1 + x + y + \sqrt{y^2 + x}$$

   nel dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -y \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 2\right\}.$$

4. Calcolare l'integrale

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}\, dx dy dz,$$

   dove V è il dominio definito dalla disuguaglianza $x^2 + y^2 + z^2 \le z$.

Analisi Matematica 2 (F/M), Scritto Generale, 10-4-1997

1. Sia

$$f(x) = x - |x|.$$

   a. Determinare i coefficienti nella serie di Fourier della f.
   b. Discutere la convergenza (assoluta, uniforme) della serie di Fourier di f.
   c. Discutere se è permessa l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier della f.

2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2e^{-x}.$$

   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
   b. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto la condizione iniziale $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Calcolare i massimi e minimi della funzione

$$f(x, y, z) = 6 - 2x - y - z$$

   sotto il vincolo

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1.$$

4. Sia V il solido in $\mathbf{R}^3$ limitato dalle superficie

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(4z)),$$

   che si trova tra i piani $z = 0$ e $z = \pi$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.

Analisi Matematica 2 (F/M), Scritto Generale, 14-4-1997

1. Sia
$$f(x) = x + |x|.$$
   a. Determinare i coefficienti nella serie di Fourier della f.
   b. Discutere la convergenza (assoluta, uniforme) della serie di Fourier di f.
   c. Discutere su quali sottointervalli di $[-\pi, \pi]$ è permessa l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier della f.

2. Consideriamo l'equazione differenziale
$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}.$$
   a. Trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea.
   b. Trovare la soluzione dell'equazione non omogenea sotto la condizione iniziale $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Calcolare i massimi e minimi della funzione
$$f(x, y, z) = 6 - 2x - 3y - z$$
   sotto il vincolo
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

4. Sia V il solido in $\mathbf{R}^3$ limitato dalle superficie
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(4z)),$$
   che si trova tra i piani $z = 0$ e $z = \pi$.
   a. Calcolare il volume del solido V.
   b. Calcolare l'area della superficie limitante questo solido.