Esercizi Vari: Dagli scritti di Analisi 2, A.A. 93-95

1. Per $\alpha > 0$ consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n(\log n)^\alpha}.$$

a. Calcolare il raggio di convergenza R.

b. Trovare gli $\alpha > 0$ per cui la serie è convergente per $z = R$.

c. Dimostrare che la serie è convergente per $z = -R$ e $\alpha > 0$.

d. Per ciascun $\alpha > 0$ si determinino gli intervalli $[-R, c]$ in cui la serie è uniformemente convergente.

2. Per $\alpha > 0$ consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3z)^n}{n(\log n)^\alpha}.$$

a. Calcolare il raggio di convergenza R.

b. Trovare gli $\alpha > 0$ per cui la serie è convergente per $z = -R$.

c. Dimostrare che la serie è convergente per $z = R$ e $\alpha > 0$.

d. Per ciascun $\alpha > 0$ si determinino gli intervalli $[c, R]$ in cui la serie è uniformemente convergente.

3. Consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z)^n}{3n + n^2 \log n}.$$

a. Calcolare il raggio di convergenza R.

b. Determinare gli insiemi di convergenza semplice ed assoluta.

c. In quali intervalli $[a, R]$ $(-R \leq a < R)$ e $[-R, b]$ $(-R < b \leq R)$ è uniformemente convergente la serie di potenze?

4. Consideriamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = \pi^2 - x^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie.

c. Utilizzare la somma per $x = \pi$ (oppure per $x = 0$) per calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

d. Utilizzare la disuguaglianza di Bessel per dimostrare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \frac{\pi^4}{90}$.

5. Consideriamo la serie di Fourier della funzione f definita da $f(x) = 1$ per $0 \leq x \leq \pi$ e $f(x) = -1$ per $-\pi \leq x < 0$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie.

c. Utilizzare la serie di Fourier per calcolare $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$.

d. Utilizzare la disuguaglianza di Bessel per dimostrare $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{8}$.

6. Consideriamo la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}\,(kx)],$$

dove $f(x) = \pi^2 - x^2$ per $x \in [-\pi, \pi]$.

a. Calcolare i coefficienti della serie di Fourier.

b. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie.

c. È permessa la sua derivazione termine a termine in $x \in (-\pi, \pi)$? Si spieghi la risposta [brevemente].

7. Consideriamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{(n^2+1)^\alpha x}, \qquad \alpha > 0.$$

a. Dimostrare che la serie di funzioni è uniformemente convergente in $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ se $\alpha > 1$.

b. Dimostrare che per $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{(n^2+1)^\alpha x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n^2+1)^\alpha}.$$

8. Per $\alpha > 0$ consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3z)^n}{n(\log n)^\alpha}.$$

a. Calcolare il raggio di convergenza R.

b. Trovare gli $\alpha > 0$ per cui la serie è convergente per $z = R$.

c. Dimostrare che la serie è convergente per $z = R$ e $\alpha > 0$.

d. Per ciascun $\alpha > 0$ si determinino gli intervalli $[c, R]$ in cui la serie è uniformemente convergente.

0. Consideriamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2 - \pi^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Discutere la sua convergenza puntuale e uniforme.

c. Utilizzare la sua somma per $x = \pi$ (oppure per $x = 0$) per calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

d. Giustificare la sua derivazione termine a termine.

10. Consideriamo la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

a. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si trovino la sua somma e la sua somma parziale n-esima.

b. Trovare gli intervalli $[a, +\infty)$ (con $a \geq 0$) tale che la serie di funzioni è uniformemente convergente in $x \in [a, +\infty)$.

c. Dimostrare che $f'(x)$ (con $x > 0$) può essere ottenuto calcolando la derivata termine a termine. Consiglio: Per $z = 1/(1+x^2)$ risulta una serie di potenze.

11. Consideriamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\, x^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, dove $\operatorname{sgn}(x) = +1$ per $x > 0$ e $\operatorname{sgn}(x) = -1$ per $x < 0$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie.

c. Dimostrare la sua integrabilità termine a termine per $x \in (-\pi, \pi)$.

d. Dimostrare la sua derivabilità termine a termine per $x \in (-\pi, \pi)$.

12. Sia

$$f(x) = x - |x|.$$

a. Determinare i coefficienti nella serie di Fourier della f.

b. Discutere la convergenza (assoluta, uniforme) della serie di Fourier di f.

c. Discutere se è permessa l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier della f.

13. Sia

$$f(x) = x + |x|.$$

a. Determinare i coefficienti nella serie di Fourier della f.

b. Discutere la convergenza (assoluta, uniforme) della serie di Fourier di f.

c. Discutere su quali sottointervalli di $[-\pi, \pi]$ è permessa l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier della f.

Serie di Fourier[1]

14. Sia f l'estensione periodica di periodo 2π della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

   a. Calcolare i coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la somma della serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   c. Indicare i sottointervalli $[\alpha, \beta]$ di $[-\pi, \pi]$ in cui è uniformemente convergente la serie di Fourier.
   d. Mettere in evidenza l'uguaglianza di Parseval.

15. Sia f l'estensione periodica di periodo 2π della funzione

$$f(x) = x^2, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

   a. Calcolare i coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la somma della serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   c. Indicare i sottointervalli $[\alpha, \beta]$ di $[-\pi, \pi]$ in cui è uniformemente convergente la serie di Fourier.
   d. Applicare l'uguaglianza di Parseval per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} frac1n^4$.

16. Sia f l'estensione periodica di periodo 4 della funzione

$$f(x) = x, \qquad -2 < x < 2.$$

   a. Calcolare i coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la somma della serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.

[1] Vedi: Murray R. Spiegel, Analisi di Fourier, Collana Schaum, McGraw-Hill Italia, 1994; Cap. 2.

c. Indicare i sottointervalli $[\alpha, \beta]$ di $[-\pi, \pi]$ in cui è uniformemente convergente la serie di Fourier.

d. Applicare l'uguaglianza di Parseval per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} frac1n^4$.

17. Sia f l'estensione periodica di periodo 2π della funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\cos(x), \qquad -\pi < x < \pi,\ x \neq 0.$$

a. Calcolare i coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la somma della serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c. Indicare i sottointervalli $[\alpha, \beta]$ di $[-\pi, \pi]$ in cui è uniformemente convergente la serie di Fourier.

18. Sia f l'estensione periodica di periodo π della funzione

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad 0 < x < \pi,\ x \neq 0.$$

a. Calcolare i coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la somma della serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c. Indicare i sottointervalli $[\alpha, \beta]$ di $[-\pi, \pi]$ in cui è uniformemente convergente la serie di Fourier.

d. Applicare l'uguaglianza di Parseval per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} frac1n^4$.

19. Sia f l'estensione periodica dispari di periodo 2π della funzione

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad 0 < x < \pi,\ x \neq 0.$$

a. Calcolare i coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la somma della serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c. Indicare i sottointervalli $[\alpha, \beta]$ di $[-\pi, \pi]$ in cui è uniformemente convergente la serie di Fourier.

d. Applicare l'uguaglianza di Parseval per calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$.

Serie di potenze

20. Studiare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze:[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}.$$

[2] Non studiare l'andamento negli estremi dell;intervallo.

21. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{10^n}.$$

22. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1} x^{5n}.$$

23. Calcolare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}.$$

Calcolarne la somma.

24. Calcolare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

25. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n.$$

26. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}.$$

Calcolarne la somma.

27. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}.$$

28. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Calcolarne la somma.[3]

29. Sviluppare in una serie di Taylor in $x = 2$ la funzione $f(x) = 2^x$.

30. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}\, x^n.$$

31. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+\ln(n+1)}\, x^n.$$

32. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\ln^2(n)}\, x^n.$$

33. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\ln(n+1)}.$$

34. Calcolare il raggio e l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n^2+1)(n^2+2)}.$$

35. Sviluppare in una serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = \sqrt{2+x}$.

[3] È superiore al livello degli scritti.