Capitolo 1

Analisi Complessa

1.1 Numeri complessi e funzioni complesse

Questo capitolo è dedicato alle funzioni complesse, ossia alle funzioni che, in un assegnato dominio del campo complesso, assumono valori complessi. Allo scopo di evitare incomprensioni, dovute a lacune su questioni di base, vengono premesse definizioni e proprietà fondamentali sui numeri complessi.

Si definisce unità immaginaria la soluzione dell'equazione $\mathrm{i}^2 + 1 = 0$, ossia $\mathrm{i}^2 = -1$. Ovviamente i non è un numero reale.

Per numero complesso si intende un qualsiasi numero del tipo $\alpha = a + \mathrm{i}b$, essendo a e b numeri reali. I numeri a e b sono definiti parte reale e immaginaria di α. Dunque $\mathrm{Re}(\alpha) = a$ e $\mathrm{Im}(\alpha) = b$. Ad esempio: $\mathrm{Re}(\sqrt{2} + 4\mathrm{i}) = \sqrt{2}$ e $\mathrm{Im}(\sqrt{2} + 4\mathrm{i}) = 4$.

Due numeri complessi sono uguali se e solo se sono uguali sia le parti reali sia quelle immaginarie. Ad esempio: $a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d$ se e solo se $a = c$ e $b = d$.

Di conseguenza la risoluzione di un'equazione nel campo complesso richiede che lo siano le parti reali e immaginarie. Ad esempio: $x^2 + (x + y)\mathrm{i} - 3 = 0$ implica la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

dunque $x = \pm\sqrt{3}$ e $y = \mp\sqrt{3}$.

Le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione sono definite di conseguenza, ossia

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}b) \pm (c + \mathrm{i}d) &= a \pm c + \mathrm{i}(b \pm d) \\ (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) &= ac - bd + \mathrm{i}(bc + ad). \end{aligned}$$

Il complesso coniugato di un numero $\alpha = a + \mathrm{i}b$ è, per definizione, $\bar{\alpha} = a - \mathrm{i}b$. Da notare che $\alpha\bar{\alpha} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$, ossia che $\alpha\bar{\alpha}$ è reale anche se α è complesso.

Per ogni numero complesso $\alpha = a + \mathrm{i}b$ si definisce modulo di α, in simboli $|\alpha|$, il numero reale non negativo $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$. Ovviamente $|\alpha| \geq 0$ con $|\alpha| = 0$ se e solo se $\alpha = 0$. Ad esempio: $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

Se $\beta \neq 0$, si definisce come rapporto α/β il numero

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$$

Come esempio si può considerare il rapporto tra $1 + 4\mathrm{i}$ e $2 - 3\mathrm{i}$:

$$\frac{1+4\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{(1+4\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = -\frac{10}{13} + \frac{11}{13}\mathrm{i}.$$

I numeri complessi ammettono una semplice interpretazione geometrica. Con riferimento agli assi cartesiani, un numero $\alpha = a + \mathrm{i}b$ può essere identificato come il punto di coordinate (a, b), ma anche come il vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ (Figura 1.1), essendo $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ i versori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ degli assi coordinati x e y rispettivamente.

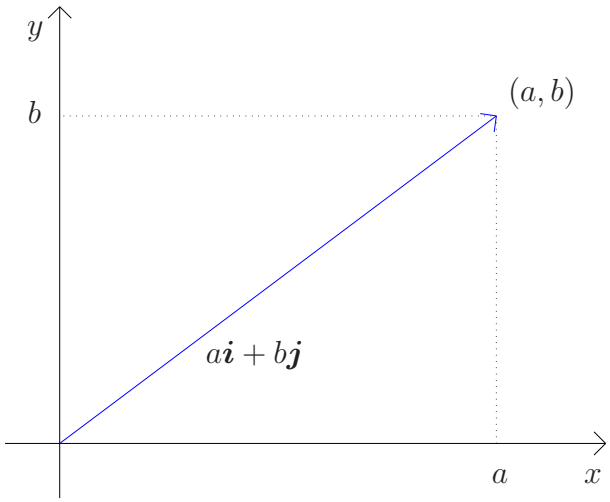

Figura 1.1:

È utile notare che $\bar{\alpha}$ rappresenta un punto del piano in posizione simmetrica rispetto ad α, relativamente all'asse dell'ascisse, e che il modulo di α rappresenta la lunghezza euclidea del vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, ossia la distanza del punto (a, b) dall'origine.

La somma di due numeri complessi $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)$, in virtù della loro interpretazione geometrica, può essere associata al vettore $(a+c)\boldsymbol{i}+(b+d)\boldsymbol{j}$, ottenibile da $(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})+(c\boldsymbol{i}+d\boldsymbol{j})$ mediante la regola del parallelogramma. È anche immediato osservare che

$$|(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)| \leq |a + \mathrm{i}b| + |c + \mathrm{i}d|,$$

essendo

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Tale relazione corrisponde al fatto, ben noto dalla scuola Euclidea, che in un triangolo la lunghezza di qualsiasi lato è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due. Dalla precedente interpretazione segue che la distanza tra i punti $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ è data da

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Esercizio 1.1 *Determinare il luogo dei punti z per cui $|z| = 1$. Si tratta evidentemente della circonferenza con centro l'origine e raggio 1, ossia dei punti (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$. La relazione $|z| \leq 1$ indica invece il cerchio unitario, ossia l'insieme dei punti (x, y) del piano con $x^2 + y^2 \leq 1$.*

Esercizio 1.2 *Determinare i numeri complessi z tali che $|z - 2 + 4\mathrm{i}| < 3$. Si tratta dei punti interni al cerchio di centro $2 - 4\mathrm{i}$ e raggio 3.*

Esercizio 1.3 *Determinare z in modo che $|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z^2) = 4$. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, deve risultare $x^2 + y^2 + 2(x^2 - y^2) = 3x^2 - y^2 = 4$, per cui l'equazione rappresenta l'iperbole $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = \frac{4}{3}$.*

Esercizio 1.4 *Verificare la validità, nel campo complesso, della formula sul binomio di Newton*

$$(\alpha + \beta)^n = \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \alpha^{n-j} \beta^j,$$

dove n è un numero naturale e

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

è il j-esimo coefficiente del binomio di Newton.

Dimostrazione. Procedendo per induzione, è sufficiente osservare che la relazione è valida per $n = 1$ e che, supponendo sia valida per $n = 1, 2, \ldots, k$, è valida anche per $n = k+1$. Per $n = 1$, è immediata, essendo (per definizione)

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1.$$

Per n=k+1, essendo la formula valida per k, si ha

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^{k+1} = (\alpha + \beta)^k (\alpha + \beta) &= \left[\sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \alpha^{k-j} \beta^j \right] (\alpha + \beta) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \alpha^{(k+1)-j} \beta^j + \sum_{r=1}^{k+1} \left(\begin{array}{c} k \\ r-1 \end{array} \right) \alpha^{(k+1)-r} \beta^r \qquad (r = j+1) \\
&= \left(\begin{array}{c} k \\ 0 \end{array} \right) \alpha^{k+1} \beta^0 + \sum_{j=1}^{k} \left[\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} k \\ j-1 \end{array} \right) \right] \alpha^{(k+1)-j} \beta^j + \left(\begin{array}{c} k \\ k \end{array} \right) \alpha^0 \beta^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \left(\begin{array}{c} k+1 \\ j \end{array} \right) \alpha^{(k+1)-j} \beta^j
\end{aligned}$$

dato che

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} k \\ j-1 \end{array} \right) &= \frac{k!}{j!(k-j)!} + \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} \\
&= \frac{k!}{j!(k-j+1)!}(k-j+1+j) \\
&= \frac{k!(k+1)}{j!((k+1)-j)!} = \left(\begin{array}{c} k+1 \\ j \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Il risultato è pertanto valido, anche nel campo complesso, qualunque sia il numero naturale n. □

Forma polare. Ad ogni numero $\alpha = a + \mathrm{i}b$, si può associare il punto (a, b) del piano complesso (Figura 1.2), a sua volta identificabile mediante le coordinate polari (ρ, θ), essendo $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\sin\theta$.

Di conseguenza $\alpha = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ è la rappresentazione polare di α, essendo ρ la lunghezza del vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ la misura in radianti della rotazione positiva (senso

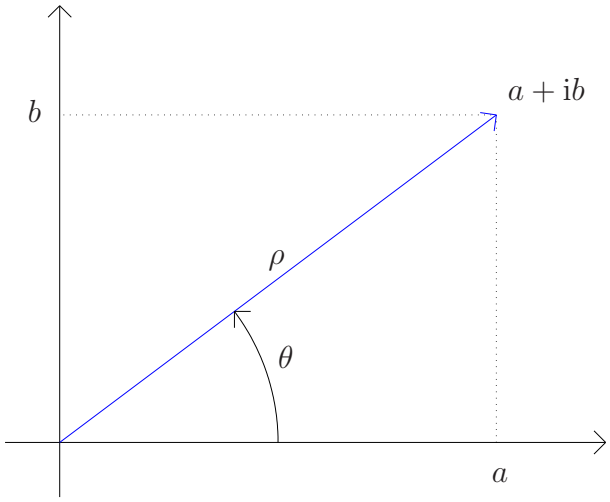

Figura 1.2:

antiorario) necessaria per sovrapporre l'asse x al vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$. Le coordinate polari ρ e θ vengono rispettivamente definite modulo e argomento di α, essendo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan \frac{b}{a}$.[1] Come esempio si possono considerare:

$$1 + \mathrm{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$$
$$-1 + \mathrm{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi).$$

Proprietà fondamentali:

1. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$;
2. se $\beta \neq 0$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$;
3. $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$;
4. se r è un numero positivo, α e $r\alpha$ hanno lo stesso argomento.

Dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare le proprietà 1. e 3. Posto $\alpha = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ e $\beta = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \rho r[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)] \\ &= \rho r[(\cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi))]\end{aligned}$$

per cui $|\alpha\beta| = \rho r$ e $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$. □

Esercizio 1.5 *Se* $\alpha = 2\mathrm{i}$ *e* $\beta = 3(1 + \mathrm{i})$,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

[1] Se $a < 0$ al valore di θ si deve aggiungere π per via della periodicità della tangente.

e

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Teorema 1.1 (Formula di de Moivre) *Per ogni intero n e ogni numero reale θ,*

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

Dimostrazione. La formula è ovviamente valida per $n = 1$. Per ogni intero positivo, in conseguenza della proprietà 3,

$$\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = n\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = n\theta$$

e di conseguenza il risultato è corretto, essendo $\rho = 1$. Per $n = -m$, con m intero positivo,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n &= \frac{1}{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + \mathrm{i}\sin m\theta} \\ &= \cos m\theta - \mathrm{i}\sin m\theta\end{aligned}$$

e dunque,

$$\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-m} = -m\theta.$$

□

Esercizio 1.6 *Verificare l'identità trigonometrica di Lagrange*

$$\sum_{j=0}^{n}\cos j\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

nell'ipotesi che $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$.

Dimostrazione. Se $\alpha = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, si ha $\alpha^j = \cos j\theta + \mathrm{i}\sin j\theta$, per cui $\cos j\theta = \mathrm{Re}(\alpha^j)$ e dunque

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\cos j\theta &= \mathrm{Re}\Big(\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\Big) = \mathrm{Re}\,\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \qquad (\alpha \neq 1) \\ &= \mathrm{Re}\,\frac{(1-\cos(n+1)\theta) - \mathrm{i}\sin(n+1)\theta}{(1-\cos\theta) - \mathrm{i}\sin\theta} \\ &= \frac{[1-\cos(n+1)\theta](1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos n\theta}{2(1-\cos\theta)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(1-\cos\theta)\cos n\theta + \sin n\theta\sin\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos n\theta + 2\sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

□

Radici n-esime dell'unità. Sia n un intero positivo. Il numero z è una radice n-esima dell'unità se $z^n = 1$. Posto $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, per la formula di de Moivre deve dunque risultare

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = 1,$$

ossia $\rho = 1$ e $n\theta = 2k\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \dots$). In conseguenza della periodicità di $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$, si ottengono n radici distinte dell'unità ponendo

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Per qualunque altro valore intero di k si ottengono radici già ottenute di z_k. Ragionando allo stesso modo è immediato dimostrare che se $\alpha = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$ le sue radici n-esime sono

$$\beta_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ad esempio:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1} &= \cos\frac{2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)\\ &= \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}\end{aligned}$$

Esercizio 1.7 *Determinare le radici quarte di* $1 - \mathrm{i}$.

Poiché $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right)$,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1-\mathrm{i}} &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right)\\ &= 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{7}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Le definizioni e le principali proprietà sugli insiemi dei numeri reali possono formalmente estendersi al campo complesso senza particolari difficoltà. Questo vale in particolare per le seguenti definizioni:

Punto interno: un numero α di un insieme S è un punto interno ad S se esiste un cerchio centrato in α contenente soltanto punti di S.

Punto di frontiera: un numero α di un insieme S è un punto di frontiera per S se ogni cerchio centrato in α contiene punti di S e punti non di S.

Insieme aperto: S è un insieme aperto se tutti i sui punti sono interni.

Frontiera: la frontiera di S è l'insieme dei punti di frontiera di S.

Punto di accumulazione: un numero α è un punto di accumulazione per un insieme S se ogni intorno di α contiene punti di S.

Un insieme S di numeri complessi è **limitato** se esiste un cerchio di diametro finito che lo contiene. Si definisce **compatto** un insieme chiuso e limitato.

Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass) *Un insieme infinito e compatto possiede almeno un punto di accumulazione.*