Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{1}{x}\, y' + \frac{1}{x^2}\, y = x,$$

osservando che $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x \log(|x|)$ sono soluzioni della corrispondente equazione omogenea.

2B. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(2n+1)\log(n+2)},$$

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente?

3A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale[2]

$$y' = \frac{y^3 + 1}{(x^2+1)y^2}.$$

Qual'è la soluzione di questa equazione differenziale sotto la condizione iniziale $y(0) = -1$?

3B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $0 \leq x < T$ e $f(x) = -x^2$ per $-T < x \leq 0$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.

[1] 18.04.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà gli esercizi 2A, 3A e 6A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà gli esercizi 2B, 3B e 6B.

[2] La soluzione generale è da rappresentare nella forma $y = F(x, \text{cost.})$.

c. È permessa la sua integrazione termine a termine tra $\hat{x} = 0$ e $\hat{x} = x$ per $x \in (0, \frac{T}{2})$? Poichè si o poichè no?

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\left(x^3 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(e^{2y} + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy.$$

   a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

   Se esiste, costruirne una primitiva.

   b.[*] Esiste una primitiva nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Perchè esiste o perchè non esiste?

5. Calcolare la lunghezza della curva definita in coordinate polari da

$$\rho(\theta) = 1 - \theta^2, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

6A. Calcolare il volume del solido rinchiuso tra le coniche di equazione $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = \frac{1}{4} + x^2 + y^2$.

6B. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(5)} + 8y'' = 0.$$

Punteggio massimo:

esercizio	punteggio
1	4
2A-2B	6
3A-3B	6
4	5
5	4
6A-6B	5
totale	30