Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0.$$

2. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+2)[5^{n+1} - 3^{n+1}]},$$

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente? In quali intervalli $[a, b]$ è uniformemente convergente la serie di potenze?

3. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo 2π tale che $f(x) = x \cos(x)$ per $|x| < \pi$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   c. In quali sottointervalli $[a, b]$ di $[-\pi, \pi]$ è uniformemente convergente? Spiegare perchè.

   d. È giustificata la derivazione termine a termine? Spiegare perchè.

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy.$$

   a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

   b. Costruirne una primitiva nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se esiste. Se non esiste, dimostrare la sua non esistenza.

   c. Costruirne una primitiva nel dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ se esiste. Se non esiste, dimostrare la sua non esistenza.

[1] 18.04.2007

5. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t^2, 2t), \qquad 0 \leq t \leq \ln(3).$$

Semplificare tutte le espressioni del tipo $\sinh(\ln(3))$.

6. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(8)} - 256y = 0.$$

Punteggio massimo:

esercizio	punteggio
1	4
2	6
3	6
4	5
5	4
6	5
totale	30