Scritto Generale del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0.$$

2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = 3x^2(y^2 - 1)$$
e indicare la soluzione che verifica la condizione $y(0) = -1$.

3. Calcolare il minimo (relativo) della funzione $f(x, y) = xy$ sotto il vincolo $x + 2y = 1$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo i punti $(3, 6)$, $(0, 3)$ e $(-\sqrt[3]{9}, 0)$ della curva ellittica di equazione $F(x, y) = 0$, dove
$$F(x, y) = x^3 - y^2 + 9.$$
Applicare il teorema delle funzioni implicite per scoprire quali dei tre punti hanno un intorno nel quale si può esprimere $y = f(x)$ con f di classe C^1.

5. Calcolare l'area della superficie di equazione $z = xy$ che si trova all'interno del quarto cilindro $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (z, x, y)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano xy. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza del grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2}[e^{2x} + e^{-2x}]$ per $0 \leq x \leq \ln(3)$.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[1] 15.06.2004

Scritto Generale del Corso di Analisi Matematica 4[2]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' + 36y = \cos(6x).$$

2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = 3x^2(y^2 + 1).$$

3. Calcolare il minimo (relativo) della funzione $f(x,y) = xy$ sotto il vincolo $x + 2y = 1$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo i punti $(0,2)$ e $(6\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ della curva di equazione $F(x,y) = 0$, dove
$$F(x,y) = y^3 - xy - 8.$$
Applicare il teorema delle funzioni implicite per scoprire quali dei tre punti hanno un intorno nel quale si può esprimere $y = f(x)$ con f di classe C^1.

5. Calcolare l'area della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (y, z, x)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ che si trova tra i piano $z = 0$ e $z = 1$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva di equazione (in coordinate polari) $r(\theta) = 2\theta$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[2] 2.07.2004

Scritto Generale del Corso di Analisi Matematica 4[3]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 6y' + 5y = 2\,e^x.$$

2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = 4x(y + y^2).$$

3. Calcolare il minimo (relativo) della funzione $f(x, y) = x^2 + 9y^2$ sotto il vincolo $x + 3y = 1$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo i punti $(1, 0)$, $(0, 0)$ e $(2, 2)$ della curva di equazione $F(x, y) = 0$, dove
$$F(x, y) = y^2 - xy.$$
Applicare il teorema delle funzioni implicite per scoprire quali dei tre punti hanno un intorno nel quale si può esprimere $y = f(x)$ con f di classe C^1.

5. Calcolare l'area della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (x, z, y)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva di equazione
$$\varphi(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 4t), \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[3]24.09.2004

Scritto Generale del Corso di Analisi Matematica 4[4]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' + 25y = 2\,\sin(5x).$$

2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{4xy^2}{1+y^2}.$$

3. Calcolare il minimo a massimo (relativo) della funzione $f(x,y) = x+3y$ sotto il vincolo $x^2+9y^2 = 1$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo i punti $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$ della cosiddetta curva ellittica di equazione $F(x,y) = 0$, dove
$$F(x,y) = y^2 - x^3 - 1.$$
Applicare il teorema delle funzioni implicite per scoprire quali dei tre punti hanno un intorno nel quale si può esprimere $x = g(y)$ con g di classe C^1.

5. Calcolare l'area della superficie della paraboloide di equazione $z = 9 - x^2 - y^2$ all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\int\!\!\int_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{n}})d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (xy^2, yz^2, zx^2)$ e S è la superficie sferica di raggio 1 e centro l'origine. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva di equazione
$$\varphi(t) = (4t\cos(t), 4t\sin(t)), \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[4] 04.10.2004

Scritto Generale del Corso di Analisi Matematica 4[5]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' + 3y' + 2y = 2\,e^{-x}.$$

2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = 3x^2(1 + y^2).$$

3. Calcolare il minimo (relativo) della funzione $f(x, y) = 9x^2 - y^2$ sotto il vincolo $x + 3y = 1$.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione
$$F(x, y) = -x + 2y + \ln|y| = 0$$
definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(2, 1)$. Determinare la retta tangente alla curva $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ in tale punto.

5. Calcolare l'area della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (y, z, x)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva di equazione
$$\varphi(t) = (\sin(t), \cos(t), 3t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[5] 28.01.2005

Scritto Generale del Corso di Analisi Matematica 4[6]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' + 6y' + 9y = 2\,\sin(3x).$$

2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}.$$

3. Calcolare il minimo (relativo) della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ sotto il vincolo $2x + 4y = 1$.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione
$$F(x,y,z) = x - 2y + \ln|yz| = 0$$
definisce una funzione $z = f(x,y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(2,1,-1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della superficie conica di equazione $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

6. Calcolare $\iint_S (\boldsymbol{F}, \nu)d\sigma$ se $\boldsymbol{F} = (x^3, y^3, z^3)$ e S è la superficie dell'ellissoide di equazione $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$. Si consiglia applicare il Teorema della Divergenza.

7. Calcolare la lunghezza della curva di equazione
$$\varphi(t) = (\sin(t), \cos(t), \frac{1}{2}[e^t + e^{-t}]), \qquad 0 \le t \le \ln(2).$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[6]21.02.2005