Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(7)} + y^{(6)} + y' + y = 0.$$

2. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ $(-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier, la somma della serie e spiegare in quali sottointervalli $[a, b]$ di $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ è uniformemente convergente la sua serie di Fourier.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto i due vincoli $x + 2y + 3z = 6$ e $x + y + z = 3$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (w \sin u \sin v, w \sin u \cos v, -w \cos u). \end{aligned}$$

   Per quali punti $(u, v, w) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui si può definire la funzione inversa f^{-1}?

5. Calcolare l'area della porzione dell'iperboloide $z = 2xy$ all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (y^2, z^2, x^2)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (3t \cos(t), 3t \sin(t), 4t\sqrt{t}), \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[1] 16.06.2006.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[2]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(6)} - 8y^{(4)} + 16y'' = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = 2x\,\mathrm{tg}(y)$$
e indicare la soluzione che verifica la condizione $y(\pi) = 0$.

2B. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = \cosh(x)$ $(-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $x + 2y + 3z = 6$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione
$$F(x, y, z) = y + 2x + \ln|xz| = 0$$
definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(-1, 2, -1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = -2y$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma$, dove
$$\vec{\boldsymbol{F}} = (-y^3, x^3, 0)$$
e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

[2]8.07.2006. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), \frac{2}{3}t^{3/2}), \qquad 0 \le t \le 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[3]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} + 13y^{(4)} + 36y'' = 0.$$

2. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = \sinh(x)$ $(-\frac{T}{2} < x \le \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $5x-y-z = 2$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = x - 2y + \ln|yz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(2, 1, 1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ interno alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e sopra il piano $z = 0$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (-2y, 2x, 0)$$

e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

[3] 8.07.2006

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (\frac{2}{3}t^{3/2}, \sin(t), \cos(t)), \qquad 0 \leq t \leq 3.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[4]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} = 64y.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = 2x\cos^2(y).$$

Quali sono le sue soluzioni costanti?

2B. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = (\frac{T}{2} - |x|)^2$ $(-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (u^2\cos v, u^2\sin v\sin w, u^2\sin v\cos w). \end{aligned}$$

Per quali punti $(u, v, w) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui si può definire la funzione inversa f^{-1}?

[4]22.09.2006. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

5. Calcolare l'area della porzione del piano di equazione $x + 2y + 3z = 6$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (x, 2z, 3y),$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 9, z \geq 5\}.$$

Specificare la direzione del versore normale.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), \cosh(t)), \qquad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Stabilire se la curva è chiusa, regolare, semplice.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[5]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(7)} + 64y' = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = x \operatorname{cotg} y.$$

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x$ per $-T/2 \leq x < T/2$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

[5] 2.02.2007. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $3x + 2y + z = 12$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\,dx - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\,dy.$$

   a. È chiusa?

   b. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

   c. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$?

   Motivare le tre risposte.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ per $z \geq 0$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (z, x, y)$$

   e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ per cui $0 \leq z \leq 3$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t, \cos\alpha \cosh t, \sin\alpha \cosh t), \qquad 0 \leq t \leq \ln(3),$$

   al variare di α.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[6]

[6] 23.02.2007. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(7)} + 13y^{(5)} + 36y^{(3)} = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = 2x \operatorname{tg} y.$$

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = |x|$ per $-T/2 \leq x < T/2$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $x + 2y + 5z = 22$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la forma differenziale
$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

   a. È chiusa?

   b. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

   c. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$?

   Motivare le tre risposte.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie parabolica di equazione $x^2 + y^2 + z = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove
$$\vec{\boldsymbol{F}} = (z^2, x^2, y^2), \qquad S = \{(x, y, z) : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 3\}.$$
   Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza del grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$ per $0 \leq x \leq 1$.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.