Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(7)} + y^{(6)} + y' + y = 0.$$

2. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ $(-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier, la somma della serie e spiegare in quali sottointervalli $[a, b]$ di $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ è uniformemente convergente la sua serie di Fourier.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto i due vincoli $x + 2y + 3z = 6$ e $x + y + z = 3$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (w \sin u \sin v, w \sin u \cos v, -w \cos u). \end{aligned}$$

Per quali punti $(u, v, w) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui si può definire la funzione inversa f^{-1}?

5. Calcolare l'area della porzione dell'iperboloide $z = 2xy$ all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (y^2, z^2, x^2)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (3t \cos(t), 3t \sin(t), 4t\sqrt{t}), \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[1] 16.06.2006.