Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} + 7y^{(3)} - 8y = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \pi(1 + 2x)(1 + y^2),$$

scrivendo le soluzioni nella forma $y = y(x)$. Determinare la soluzione sotto la condizione iniziale $y(1) = \pi$.

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $-T/2 \leq x < T/2$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

c. È permessa la derivazione termine a termine? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

nel dominio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 4)^2 + y^2 + (z - 3)^2 \leq 25\}.$$

4. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Per quali punti $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui si può definire la funzione inversa f^{-1}? Spiegare perchè vale il risultato.

[1] 18.06.2007. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo i programmi degli AA 2004-2007, farà l'esercizio 2B.

5. Calcolare l'area della porzione dell'iperboloide di equazione $z = 2xy$ per (x, y) che soddisfano $0 \leq x \leq y \leq x\sqrt{3}$ e $x^2 + y^2 \leq 16$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\text{rot}\, \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, z, x)$$

e S è la parte della frontiera del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ che non cade nel piano xy. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (-2t\sqrt{2t}, 3t\text{sen}(t), 3t\cos(t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.