Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} - 8y^{(4)} + 16y'' = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = 2x\,\mathrm{tg}(y)$$

e indicare la soluzione che verifica la condizione $y(\pi) = 0$.

2B. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = \cosh(x)$ $(-\frac{T}{2} < x \leq \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $x + 2y + 3z = 6$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = y + 2x + \ln|xz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(-1, 2, -1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = -2y$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (-y^3, x^3, 0)$$

e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

[1] 8.07.2006. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), \frac{2}{3}t^{3/2}), \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[2]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(6)} + 13y^{(4)} + 36y'' = 0.$$

2. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier della funzione $f(x) = \sinh(x)$ $(-\frac{T}{2} < x \le \frac{T}{2})$ di periodo T. In particolare, calcolare i coefficienti di Fourier e la somma della serie.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $5x-y-z = 2$ e interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione
$$F(x, y, z) = x - 2y + \ln |yz| = 0$$
definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(2, 1, 1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ interno alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e sopra il piano $z = 0$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove
$$\vec{\boldsymbol{F}} = (-2y, 2x, 0)$$
e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva
$$\varphi(t) = (\frac{2}{3}t^{3/2}, \sin(t), \cos(t)), \qquad 0 \le t \le 3.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 4 e 6, 4 pt. per gli altri esercizi.

[2] 8.07.2006