Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} - 64y = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{1+x^2}{y(y-1)}.$$

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = \cosh(x)$ per $-T/2 \le x \le T/2$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $x+y-z = 12$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x, y, z) = y + 2z + \ln|xyz| = 0$$

   definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(2, -1, \frac{1}{2})$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 + 4x = 0$ e sopra il piano xy.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, 2x, 0)$$

   e S è la porzione della paraboloide $z = 4 - x^2 - 4y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

[1] 27.01.2006. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (2t, \cosh(t), \sqrt{3}\,\cosh(t)), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.