Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(6)} + 26y^{(3)} - 27y = 0.$$

2. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $0 \leq x < T/2$ e $f(x) = -x^2$ per $-T/2 \leq x < 0$.
   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.
   c. È permessa l'integrazione termine a termine? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo della funzione
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
sotto il vincolo $2x + 3y + 5z = 11$.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione
$$F(x, y, z) = y + 2x + \ln|xz| = 0$$
definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(-1, 2, 1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione del piano di equazione $2x + 3y + z = 6$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 9$.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove $\vec{\boldsymbol{F}} = (y^2, z^2, x^2)$ e S è la porzione della paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva
$$\varphi(t) = (-3t, 2t\sqrt{2t}), \qquad 1 \leq t \leq 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.

[1] 17.11.2007.