Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(6)} - y = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{x^2+2}{2(y+1)}.$$
Anche trovare la soluzione y sotto la condizione iniziale $y(0) = -1$.

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $-T/2 \leq x \leq T/2$.
   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.
   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $x + 2y + 3z = 6$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione
$$F(x, y, z) = y + 2x + \ln |xz| = 0$$
definisce una funzione $z = f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(-1, 2, 1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ in questo punto.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ e sopra il piano xy.

[1] 24.02.2006. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\text{rot}\,\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, 2x, 0)$$

e S è la porzione della superficie sferica $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = \left(3t, 4t, \frac{5}{2}[e^t + e^{-t}]\right), \qquad 0 \le t \le 2.$$

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.